# МОДУЛЬ 1. МЕХАНІКА

## *1.1. НАВЧАЛЬНИЙ ЕЛЕМЕНТ КІНЕМАТИКА*

### *1.1.1. Механічний рух. Система відліку*

*Кінематика* вивчає рух тіл, не розглядаючи причини, що викликали цей рух.

*Механічний рух* — це зміна положення тіла в просторі відносно інших тіл, тому механічний рух є відносним. Будь-яке тіло може бути нерухомим відносно одних тіл і рухатись відносно інших. Тіло, відносно якого розглядають рух, називають *тілом відліку*. Для математичного опису руху з тілом відліку необхідно пов'язати систему координат.

Існує декілька різних систем координат, але найпоширенішою є *прямокутна декартова система координат* з трьома координатами ($x$, $y$, $z$). Переміщення тіл відбувається з плином часу, тому для опису руху необхідно мати також годинник. Тіло відліку, пов'язана з ним система координат та годинник становлять *систему відліку*.

### *1.1.2. Способи опису руху матеріальної точки. Основна (пряма) задача кінематики*

Визначимо поняття для опису механічного руху. Розглянемо спочатку рух найпростішого об'єкта — *матеріальної точки* (тіла певної маси, розмірами якого в даних умовах можна знехтувати).

*Траєкторія* — лінія, уздовж якої рухається матеріальна точка.

*Шлях* ($\Delta S$, або $S$) — довжина траєкторії або, що те саме, відстань між заданими точками 1 і 2, відрахована вздовж траєкторії. Шлях — величина скалярна і в системі СІ вимірюється в метрах (м).

*Вектор переміщення* $\Delta\vec{r}$ — найкоротша відстань між початковою і кінцевою точками траєкторії. Переміщення — величина векторна, має напрям від початкової до кінцевої точки траєкторії. У системі СІ вимірюється в метрах.

У декартовій системі координат положення матеріальної точки $M$ також може бути задане за допомогою радіуса-вектора.

*Радіусом-вектором* $\vec{r}$ точки називають вектор, проведений з початку координат у дану точку (рис. 1.1).

Радіус-вектор можна записати через його проекції $r_x$, $r_y$, $r_z$ на відповідні координатні осі:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} ,$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні безрозмірні вектори (орти), які задають масштаб довжини і напрями відповідних осей координат, модулі ортів дорівнюють одиниці: $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$.
За модулем радіус-вектор дорівнює:

$$\left|\vec{r}\right| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}\ .$$

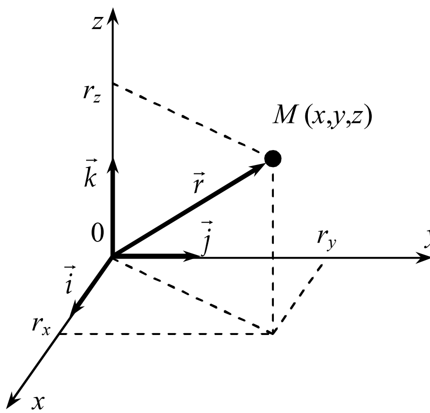


Рис 1.1

Модуль (абсолютне числове значення) будь-якого вектора позначають $\left|\vec{a}\right|$ або просто *a*. Якщо при розв'язанні задачі з'являється від'ємна величина $-a$, тобто $a < 0$, то вектор цієї величини потрібно спрямувати у протилежному напрямі.

*Основна* (*пряма*) *задача кінематики* полягає в тому, щоб за кінематичними рівняннями руху матеріальної точки знайти кінематичні характеристики її руху в будь-який момент часу.

### *1.1.3. Кінематичні характеристики поступального руху матеріальної точки*

*Середня швидкість переміщення* $\langle\vec{v}\rangle$ за проміжок часу $\Delta t$ — векторна величина, яка дорівнює відношенню вектора переміщення до цього проміжку часу:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\ .$$

Вектор $\langle\vec{v}\rangle$ збігається за напрямом з $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.2, *a*).

Будемо нескінченно зменшувати проміжок часу, спрямовуючи його до нуля ($\Delta t \to 0$). Починаючи з деяких значень $\Delta t$ відношення $\Delta\vec{r}\,/\,\Delta t$ перестає змінюватись. Ця межа і визначає швидкість руху в даній точці траєкторії в певний момент часу, тобто *миттєву швидкість* (при цьому точки 1 і 2 на рис. 1.2, *а* будуть нескінченно наближатись одна до одної).

Математично це записується так:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

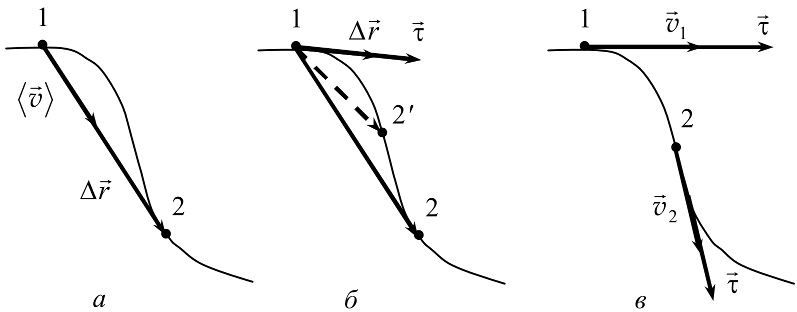


Рис. 1.2

Отже, миттєва швидкість — межа, до якої прямує відношення приросту радіуса-вектора $\Delta\vec{r}$ до відповідного проміжку часу $\Delta t$ за умови, що $\Delta t \to 0$. У математиці межу відношення приросту функції $\Delta f(x)$ до приросту аргументу $\Delta x$ за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називають похідною функції за даним аргументом:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}.$$

У нашому випадку функцією є радіус-вектор, його приріст — $\Delta\vec{r}$; аргументом є час, приріст якого — $\Delta t$. Отже,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

*миттєва швидкість* $\vec{v}$ (або просто *швидкість*) – векторна величина, що дорівнює похідній радіуса-вектора за часом.

Оскільки при $\Delta t \to 0$ напрям хорди $\Delta\vec{r}$ збігається з напрямом дотичної до траєкторії руху $\vec{\tau}$ (рис. 1.2, *б*), то і вектор швидкості $\vec{v}$ напрямлений по дотичній (рис. 1.2, *в*). Модуль вектора швидкості

$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt}.$$

У системі СІ швидкість вимірюється в метрах за секунду (м/с).

Рух з постійною швидкістю ($v$ = const), називають *рівномірним*, а рух, при якому $v \neq \text{const}$, називають *нерівномірним*, або *змінним*.

Знайдемо вираз для швидкості в тому випадку, коли рівняння руху задано в траєкторному вигляді $S = S(t)$.

Оскільки при $\Delta t \to 0$ маємо $|d\vec{r}\,| = dS$, миттєва швидкість

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

*Середньою шляховою швидкістю* $\langle v \rangle$ називають скалярну величину, яка визначається відношенням усього пройденого шляху до всього затраченого часу:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Розглянемо випадок, коли рівняння руху задані в координатній формі. Похідні від цих виразів за часом дадуть проекції вектора швидкості на відповідні координатні осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Тоді вектор швидкості запишеться як

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

а його модуль

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

*Прискорення* характеризує зміну швидкості за одиницю часу. Розрізняють прискорення середнє й миттєве.

*Середнє прискорення* $\langle \vec{a} \rangle$ – векторна величина, яка визначається відношенням зміни швидкості $\Delta\vec{v}$ до проміжку часу $\Delta t$, за який ця зміна відбулася:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Напрям вектора $\langle \vec{a} \rangle$ збігається з напрямом $\Delta\vec{v}$.

*Миттєве прискорення* (або просто *прискорення*) $\vec{a}$ або прискорення в даній точці траєкторії в певний момент часу — це межа, до якої прямує середнє прискорення при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Використовуючи поняття похідної, прискорення можна записати так:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Прискорення – векторна величина, що дорівнює похідній вектора швидкості за часом. Прискорення також можна подати як другу похідну радіуса-вектора за часом:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Прискорення в СІ вимірюють в метрах за секунду в квадраті (м/с$^2$).
$\vec{a}_\tau$ — *тангенціальне прискорення* (або дотичне), яке характеризує зміну швидкості за модулем і спрямоване по дотичній до траєкторії;
$\vec{a}_n$ — *нормальне прискорення* (або доцентрове), яке характеризує зміну швидкості за напрямом і спрямоване по нормалі до траєкторії.

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n},$$

*Повне прискорення* дорівнює векторній сумі цих двох прискорень

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Модуль повного прискорення і кут $\alpha$ між повним прискоренням і дотичною до траєкторії відповідно дорівнюють:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}, \qquad tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

### *1.1.4. Обернена задача кінематики*

*Обернена задача кінематики* полягає в знаходженні формул руху за відомими кінематичними характеристиками руху.

За відомим прискоренням $\vec{a}$ можна знайти рівняння руху у *векторному* вигляді. Елементарний приріст швидкості $d\vec{v} = \vec{a}dt$. Для випадку рівнозмінного руху $\vec{a} = \text{const}$ інтегрування цього виразу за часом від $t = 0$ до $t$ дає

$$\Delta\vec{v}(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int_0^t \vec{a}dt = \vec{a}t,$$

де $\vec{v}_0$ – швидкість матеріальної точки в момент часу $t = 0$, або

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Щоб знайти весь шлях, пройдений за певний проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$, необхідно проінтегрувати вираз:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

$$\Delta S(t) = S(t) - S_0 = \int_0^t (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

де $S_0$ – початковий шлях в момент часу $t = 0$, або

$$S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Оскільки в момент $t = 0$ $S(t) = S_0$, то *пройдений* шлях дорівнюватиме

$$S(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Знайшовши $t$ з виразу для швидкості $v(t) = v_0 + at$ і підставивши його в останню формулу, дістанемо корисне співвідношення для розв'язування задач:

$$v^2 - v_0^2 = 2aS.$$

### *1.1.5. Рух матеріальної точки по колу*

Положення матеріальної точки під час руху по колу можна визначити кутом повороту $\Delta\varphi$. Як видно з рис. 1.3, *а*, *кут повороту* є центральним кутом, який стягується дугою $\Delta S$, яку описує матеріальна точка за час $\Delta t$. Вимірюється кут повороту в радіанах (рад) і є скалярною величиною. Кут повороту при одному оберті точки по колу дорівнює $2\pi$ радіан, а при $N$ обертах

$$\Delta\varphi = 2\pi N.$$

Зв'язок між довжиною дуги та малим кутом повороту:

$$\Delta S = R\Delta\varphi,$$

де $R$ — радіус кола.

Для елементарних проміжків часу $dt$ цей вираз матиме вигляд:

$$dS = Rd\varphi,$$

де $d\varphi$ — елементарний кут повороту.

Для того щоб показати напрям руху точки по колу, домовились елементарний кут повороту представити як вектор $d\vec{\varphi}$, який відкладається вздовж осі обертання, тобто він перпендикулярний площині обертання. *Напрям вектора* $d\vec{\varphi}$ визначається за *правилом правого гвинта*: вектор елементарного кута повороту збігається за напрямом з поступальним рухом гвинта, ручка якого обертається в напрямі руху точки по колу (рис. 1.3*а*). Такі «штучні» вектори називають *псевдовекторами.*

Розрізняють середню і миттєву кутові швидкості. *Середня кутова швидкість* $\langle\omega\rangle$ визначається відношенням кута повороту $\Delta\varphi$ до відповідного проміжку часу $\Delta t$:

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

*Миттєва кутова швидкість* визначається як

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \omega \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

тобто чисельно вона дорівнює похідній кута повороту за часом.

Вимірюється кутова швидкість у радіанах за секунду (рад/с). Вона також є псевдовектором, напрямленим уздовж осі обертання відповідно до правила правого гвинта (рис. 1.3*б*).

Якщо з часом кутова швидкість не змінюється, тобто $\omega = \text{const}$, рух по колу називають *рівномірним* і в цьому разі

$$\Delta\varphi = \omega t.$$

Сталу кутову швидкість $\omega = \text{const}$ ще називають *коловою частотою обертання*. Час, за який матеріальна точка проходить один оберт по колу, називають *періодом обертання* $T$, який вимірюється в секундах.

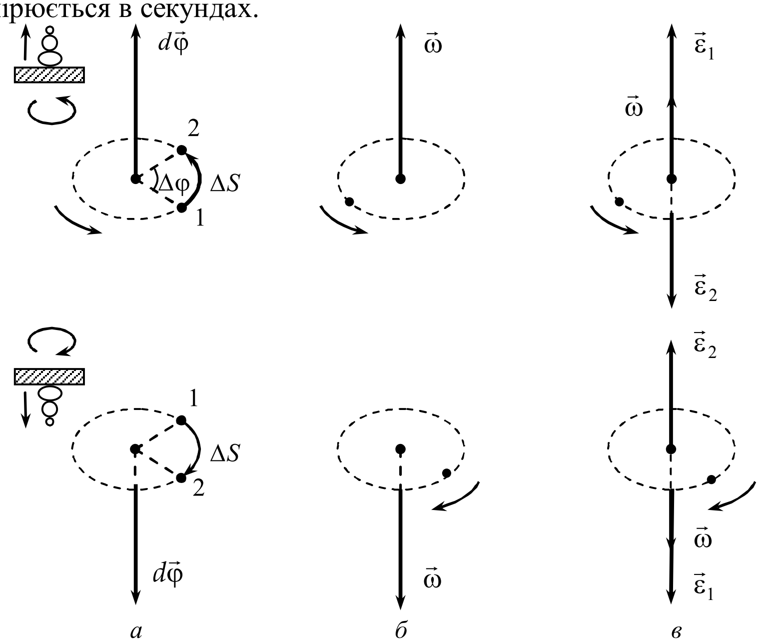


Рис. 1.3

Оскільки $2\pi = \omega T$, маємо $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Величину, обернену до періоду, називають *частотою обертання* $\nu$:

$$\nu = 1/T = N/t$$

вона показує скільки обертів по колу виконує точка за одиницю часу і вимірюється в одиницях на секунду ($с^{-1}$) або в герцах (Гц). Між частотою і кутовою частотою існує зв'язок $\omega = 2\pi\nu$.

*Кутове прискорення* характеризує зміну кутової швидкості за часом. Розрізняють середнє і миттєве кутове прискорення.

*Середнє кутове прискорення* $\langle\varepsilon\rangle$ визначається відношенням зміни кутової швидкості до відповідного проміжку часу:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta \mathrm{t}}.$$

*Миттєве кутове прискорення* $\varepsilon$ визначається як

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0}\langle\varepsilon\rangle = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Тобто воно чисельно дорівнює першій похідній кутової швидкості за часом або другій похідній кута повороту за часом. Вимірюється кутове прискорення в радіанах за секунду в квадраті (рад/$с^2$). Воно є псевдовектором, спрямованим по осі обертання

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

На рис. 1.3*в* напрям $\vec{\varepsilon}_1$ відповідає прискореному руху по колу, напрям $\vec{\varepsilon}_2$ — сповільненому руху по колу.

*Зв'язок між лінійними і кутовими характеристиками руху.*

1. Зв'язок між лінійною і кутовою швидкістю:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = R\omega\text{, тобто } v = \omega R.$$

2. Зв'язок між тангенціальним і кутовим прискоренням:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\omega R\right)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon\,, \quad \text{тобто} \quad a_\tau = \varepsilon R.$$

3. Зв'язок між нормальним прискоренням і кутовою швидкістю:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R\,, \quad \text{тобто} \qquad a_n = \omega^2 R\,.$$

Для розв'язання оберненої задачі під час руху точки по колу використовують наступні вирази:

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t\,;$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}\,;$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi,$$

де $\varphi_0$ і $\omega_0$ – відповідно початковий кут і початкова кутова швидкість у момент часу $t = 0$, $\varphi(t)$ і $\omega(t)$ – кут і кутова швидкість у момент часу $t$.

### *1.1.6. Задачі*

**Приклади розв'язання задач**

*Задача 1.* Кінематичне рівняння руху матеріальної точки по прямій (вісь $x$) має вигляд $x = A + Bt + Ct^3$, де $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с$^3$. Для моменту часу $t_1 = 2$ с визначити: 1) координату точки $x_1$; 2) миттєву швидкість $v_1$; 3) миттєве прискорення $a_1$.

*Розв'язання:* 1. Координату точки можна визначити, якщо в рівняння руху підставити значення часу. Підставляючи числові значення $A$, $B$, $C$, $t_1$, знаходимо:

$$x_1 = 4 + 2 \cdot 2 - 8 \cdot 0{,}5 = 4; \quad x_1 = 4\,\text{м}.$$

2. Миттєву швидкість у довільний момент часу знаходимо як першу похідну від координати точки по часу:

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Тоді в момент часу $t_1$ миттєва швидкість $v_1 = B + 3Ct_1^2$.

Підставляючи значення $B$, $C$, $t_1$ в одиницях СІ і виконуючи обчислення, знаходимо:

$$v_1 = -4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Від'ємне значення $v_1$ показує, що в момент часу $t_1 = 2$ с напрям руху точки протилежний напряму координатної осі.

3. Миттєве прискорення в довільний момент часу знайдемо, взявши другу похідну від координати $x$ по часу, її можна розглядати як першу похідну від миттєвої швидкості по часу:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6Ct.$$

Миттєве прискорення в момент часу $t_1$ : $a_1 = 6Ct_1$.

Підставивши числові значення величин, знаходимо: $a = -6\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Знак «мінус» показує, що напрям вектора прискорення протилежний напряму координатної осі.

*Відповідь*: $x_1 = 4$ м; $v_1 = -4$ м/с; $a = -6$ м/с$^2$.

*Задача 2.* Тіло кинуто зі швидкістю 100 м/с під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. Знайти величину та напрям швидкості тіла через 5 с, опір повітря не враховувати.

*Розв'язання.* Тіло, кинуте під кутом до горизонту, рухається за параболою (рис. 1.4). Швидкість у довільній точці криволінійної траєкторії спрямована по дотичній до неї.

Горизонтальна складова швидкості $v_x = v_0 \cos\alpha$ лишається сталою, а вертикальна $v_y$ змінюється з часом, оскільки по вертикалі тіло рухається з прискоренням вільного падіння $g$, яке напрямлене вертикально вниз, тобто

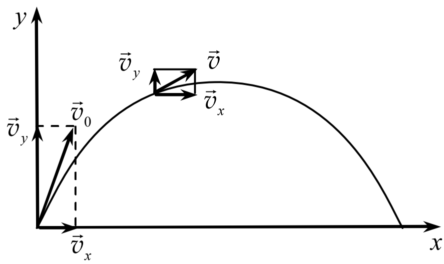


Рис. 1.4

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Наприкінці п'ятої секунди горизонтальна та вертикальна складові миттєвої швидкості відповідно дорівнюватимуть:

$$v_x = v_0 \cos 60° = 100 \cdot 0{,}5 = 50\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt = 100 \cdot 0{,}866 - 9{,}8 \cdot 5 = 37{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Числове значення миттєвої швидкості тіла наприкінці п'ятої секунди знаходимо за формулою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{50^2 + 37{,}6^2} = 62{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Напрям цієї швидкості визначимо як кут $\beta$ між вектором миттєвої швидкості наприкінці п'ятої секунди та горизонталлю. Для цього знайдемо тангенс кута $\beta$:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{37{,}6}{50} = 0{,}75, \text{ звідки } \beta = 37°.$$

*Відповідь*: $v$ = 62,5 м/с; $\beta = 37°$.

*Задача 3.* Кут повороту матеріальної точки, що рухається по колу радіусом 0,1 м, визначається рівнянням $\varphi = Bt + Ct^2$ ($B$ = 20 рад/с, $C$ = –2 рад/с$^2$). Знайти повне прискорення точки на момент часу $t$ = 4 с.

*Розв'язання.* Повне прискорення точки, яка рухається по колу, може бути знайдено за формулою $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Оскільки тангенціальне та нормальне прискорення взаємно перпендикулярні, то модуль повного прискорення $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Тангенціальне та нормальне прискорення точки знаходимо за формулами: $a_\tau = \varepsilon r$; $a_n = \omega^2 r$,

де $\omega$ — кутова швидкість тіла; $\varepsilon$ — його кутове прискорення; $r$ — радіус обертання. Підставляючи вирази для $a_\tau$ і $a_n$, знаходимо:

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Кутову швидкість $\omega$ знаходимо як першу похідну від кута повороту матеріальної точки по часу:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct\,.$$

У момент часу $t$ = 4 с кутова швидкість $\omega = 20 + 2(-2)4 = 4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Кутове прискорення це похідна від кутової швидкості за часом: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C = -\ 4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Знак «мінус» вказує, що рух сповільнений.

Підставимо числові значення: $a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} = 1{,}65\ \text{м/с}^2$.

*Відповідь*: $a$ = 1,65 м/с$^2$.

## Аудиторні задачі

1. Весь шлях автомобіль проїхав із середньою швидкістю 80 км/год. Середня швидкість на першій чверті шляху дорівнювала 120 км/год. Яка була середня швидкість на решті шляху? (72 км/год)

2. Рух двох матеріальних точок визначається рівняннями:

$$x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2\,; \qquad x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2\,,$$

де $B_1$ = 10 м/с; $B_2$ = 1 м/с; $C_1$= – 4 м/с$^2$; $C_2$ = 0,5 м/с$^2$. Через який час швидкості точок будуть однаковими? Визначити швидкість точок у цей момент, та їх прискорення $a_1$ та $a_2$. (1 с; 2 м/с; –8 м/с$^2$; 1 м/с$^2$)

3. Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю 20 м/с. Через 1 с після цього кинули вертикально вгору друге тіло з такою самою швидкістю. На якій висоті вони зустрінуться? (19,2 м)

4. Тіло кинули з вежі з початковою швидкістю 30 м/с у горизонтальному напрямі. Знайти швидкість тіла, його тангенціальне та нормальне прискорення в кінці другої секунди після початку руху. (35,8 м/с; 5,4 м/с$^2$; 8,2 м/с$^2$)

5. Матеріальна точка рухається по колу радіусом 4 м. Рівняння її руху $s = A + Bt + Ct^2$, де $B$ = –2 м/с; С = 1 м/с$^2$. Знайти тангенціальне, нормальне та повне прискорення точки в момент часу $t$ = 4 с. (2 м/с$^2$; 9 м/с$^2$; 9,2 м/с$^2$)

6. Точка обертається по колу радіусом 20 см. Рівняння залежності кута повороту точки від часу має такий вигляд: $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $B$ = – 1 рад/с, $C$ = 1 рад/с$^2$. Знайти тангенціальне, нормальне та повне прискорення точки для моменту часу $t$ = 1 с. (0,4 м/с$^2$; 0,2 м/с$^2$; 0,45 м/с$^2$)

7. Диск обертається з кутовим прискоренням –2 рад/с$^2$. Яку кількість обертів зробить диск за час, коли частота його обертів змінюється від 240 хв$^{-1}$ до 90 хв$^{-1}$? Знайти цей час. (21,6; 7,8 с)

## *1.2. НАВЧАЛЬНИЙ ЕЛЕМЕНТ ДИНАМІКА*

### *1.2.1. Динамічні характеристики поступального руху*

*Маса m* є мірою інертних і гравітаційних властивостей тіл.

*Інертні властивості* полягають у тому, що кожне тіло спричиняє опір намаганням змінити стан свого руху (тобто змінити модуль чи напрям своєї швидкості) або стан спокою. Чим більша інертність тіла, тим більша його маса, яку називають *інертною* масою. *Гравітаційні властивості* полягають у тому, що кожне тіло створює навколо себе гравітаційне поле, яке викликає притягання тіл одне до одного. Чим більші гравітаційні властивості тіла, тим більша його маса, яку називають *гравітаційною* масою.

Одиницею маси в системі СІ є кілограм (кг). Маса є величиною *скалярною* й *адитивною*, тобто маса всієї системи дорівнює сумі мас окремих елементів системи.

У ньютонівській механіці маса тіла вважається сталою величиною, що не залежить від швидкості $m = \text{const}$ .

*Густина тіла,* — маса одиниці об'єму тіла:

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad \text{або для однорідних суцільних тіл} \quad \rho = \frac{m}{V}.$$

У системі СІ густина тіла вимірюється в кілограмах на метр кубічний (кг/м$^3$).

Сила $\vec{F}$ у ньютонівській механіці – фізична величина, яка є мірою дії одного тіла на інше.

Ця дія може виникати як при безпосередньому контакті тіл (терті, ударі, стисканні і таке інше), так і на відстані між ними через посередництво створюваних тілами полів. Під дією сили виникає рух чи зміна руху тіла, або його деформація. Сила – величина векторна і характеризується чисельним значенням, напрямом і точкою прикладання. У системі СІ одиницею вимірювання сили є ньютон (Н).

Лінія, вздовж якої діє сила, називається *лінією дії сили*. Якщо на тіло одночасно діють кілька сил, прикладених до однієї й тієї самої точки тіла, їх можна замінити однією силою $\vec{F}$ , яку називають *рівнодійною*, вона дорівнює векторній сумі всіх сил, діючих на тіло:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i .$$

Додавання сил виконується за *правилом додавання векторів* (*правилом паралелограма*) – рис. 1.4.

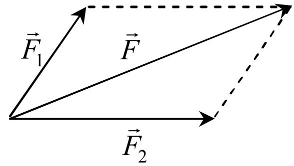


Рис. 1.4

Обернену операцію називають розкладанням сил. Слід зазначити, що не можна шукати рівнодійну сил, прикладених до різних тіл.

Сукупність тіл, виділених для розгляду з навколишнього середовища, називають *механічною системою*. Сили, що діють у механічній системі, можуть бути внутрішніми і зовнішніми.

*Внутрішніми* називають сили, з якими тіла механічної системи діють одне на одне. *Зовнішніми* називають сили, з якими тіла механічної системи взаємодіють з іншими тілами, що не належать до даної системи. Рівнодійну зовнішніх сил називають *головним вектором зовнішніх сил.*

*Імпульсом*, або *кількістю руху тіла (матеріальної точки)* $\vec{p}$, у класичній (ньютонівській) механіці називають величину, яка дорівнює добутку маси тіла (матеріальної точки) на його швидкість

$$\vec{p} = m\vec{v}\ .$$

З означення випливає, що напрям вектора $\vec{p}$ збігається з напрямом вектора $\vec{v}$. Одиницею вимірювання імпульсу в системі СІ є кілограм на метр за секунду (кг·м/с).

### *1.2.2. Закони Ньютона*

Закони Ньютона є узагальненням дослідних фактів і є постулатами класичної механіки для поступального руху.

*Перший закон Ньютона* (закон інерції): існують системи відліку, відносно яких тіло, вільне від зовнішніх впливів, рухається прямолінійно і рівномірно або перебуває у стані спокою.

Тіло, вільне від зовнішніх впливів, називають *вільним*, а його рух – *вільним рухом*, або *рухом по інерції*.

Зауважимо, що вільне тіло – фізична абстракція, проте можна створити умови, за яких зовнішні впливи компенсують один одного. На практиці це означає, що рівнодійна всіх сил, що діють на тіло, має дорівнювати нулю.

*Другий закон Ньютона* (основний закон динаміки поступального руху): прискорення тіла (матеріальної точки) прямо пропорційне діючій на тіло (матеріальну точку) силі, збігається з нею за напрямом і обернено пропорційне масі тіла (матеріальної точки):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\ .$$

Якщо на тіло діє кілька сил, то кожна з них надає тілу свого прискорення, незалежно від існування інших сил. У цьому полягає *принцип незалежності дії сил*. Результат дії цих сил аналогічний до результату дії їхньої рівнодійної:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i .$$

Запишемо другий закон Ньютона в іншій формі. Врахуємо, що $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ , а $m = \mathrm{const}$ , тоді

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} .$$

Оскільки $m\vec{v} = \vec{p}$ , остаточно виходить

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} ,$$

тобто швидкість зміни імпульсу тіла (матеріальної точки) дорівнює діючій силі. З попереднього рівняння випливає такий запис:

$$\vec{F}dt = d\vec{p} .$$

Добуток $\vec{F}dt$ називають *імпульсом сили*. Це рівняння означає, що імпульс сили дорівнює зміні імпульсу тіла (матеріальної точки).

*Третій закон Ньютона*: два тіла (матеріальні точки) діють одне на одне із силами, що рівні між собою за модулем і протилежно напрямлені вздовж прямої, яка сполучає ці тіла (матеріальні точки).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} .$$

Звернемо увагу, що сили $\vec{F}_{12}$ і $\vec{F}_{21}$ прикладені до різних тіл, тому ніколи не врівноважують одна одну (тобто рівнодійну для них визначати не можна).

### *1.2.3. Види сил*

Нагадаємо коротко про деякі сили, що найчастіше використовуються в механіці при розв'язуванні задач.

1. *Гравітаційна сила притягання*. Всі тіла в природі взаємно притягаються одне до одного. Закон, за яким відбувається таке притягання, був встановлений Ньютоном і має назву закону всесвітнього тяжіння: *сила притягання між двома точковими гравітаційними масами пропорційна добутку їхніх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними*:

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} ,$$

де $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$ – гравітаційна стала; $m_1$, $m_2$ – маси тіл, між якими виникає сила притягання; $r$ – відстань між центрами мас.
Підкреслимо, що закон всесвітнього тяжіння у такому вигляді справджується у випадку, коли розміри тіл малі порівняно з відстанню між ними, тобто тіла можна вважати матеріальними точками або точковими масами. Але, якщо тіла однорідні й сферичні (наприклад, Земля та інші планети, Сонце) то їх гравітаційне поле еквівалентне полю, що створює матеріальна точка з тією самою масою, що міститься в центрі кулі. Ось чому гравітаційні сили притягання можна вважати *центральними* силами, які напрямлені за прямою, що сполучає центри мас двох куль. У подальшому всі тіла вважатимемо однорідними кулями, що еквівалентно точковим масам, розміщеним в центрах куль.

2. *Однорідна сила тяжіння* – це сила, з якою Земля притягує до себе тіла поблизу своєї поверхні

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

де $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння.

Для тіл поблизу поверхні Землі можна записати:

$$\gamma \frac{M_з \cdot m}{R_з^2} = mg, \qquad \text{звідки} \qquad g = \frac{\gamma M_з}{R_з^2} = 9{,}8\ \text{м/с}^2,$$

де $M_з = 6 \cdot 10^{24}$ кг – маса Землі, $R_з = 6{,}4 \cdot 10^6$ м – радіус Землі.

3. *Сила тертя ковзання* – виникає при ковзані одного тіла по поверхні іншого тіла і спрямована по дотичній до поверхні контакту в напрямі, протилежному до напряму руху тіла. Сила тертя ковзання дорівнює:

$$F_{тер} = \mu N,$$

де $\mu$ – коефіцієнт тертя; $N$ – сила нормального тиску.

4. *Сила опору середовища* – виникає під час поступального руху тіла в газовому або рідкому середовищі. Вона залежить від швидкості тіла відносно середовища і спрямована протилежно до напряму швидкості. Для невеликих швидкостей сила опору пропорційна швидкості:

$$\vec{F} = -r\vec{v},$$

де $r$ – коефіцієнт опору, який залежить від форми і розмірів тіла, стану його поверхні, а також в'язкості середовища.

5. *Пружна сила* – виникає при пружних деформаціях і визначається *законом Гука*:

$$F = -kx,$$

де $k$ – коефіцієнт пружності; $x$ – зміщення з положення рівноваги. Знак «–» показує, що пружна сила спрямована протилежно до напряму зміщення.

### *1.2.4. Динамічні характеристики обертального руху абсолютно твердого тіла (АТТ)*

*Момент сили* $\vec{M}$ *відносно нерухомої точки O* характеризує здатність сили обертати тіло навколо цієї точки. Він визначається як векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки $O$ в точку прикладання сили, на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right].$$

Визначення моменту сили дано так, щоб кутове прискорення, яке виникає внаслідок дії моменту сили, збігалося за напрямом з цим моментом. Вектор $\vec{M}$ перпендикулярний до площини, утвореної векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$, а його напрям визначається за правилом правого гвинта (рис. 1.5).

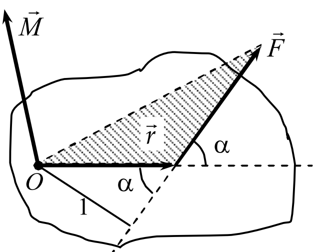

Рис. 1.5

Модуль моменту сили дорівнює

$$M = rF\sin\alpha = Fl,$$

де $\alpha$ – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$, а $l = r\sin\alpha$ – перпендикуляр, проведений з точки $O$ на лінію дії сили $\vec{F}$, який називають *плечем сили*. Одиницею вимірювання моменту сили є ньютон на метр (Н·м).

*Моментом інерції матеріальної точки I* відносно осі $z$ називають добуток маси матеріальної точки $m_i$ на квадрат її відстані $r_i^2$ від цієї осі (рис. 1.6):

$$I_i = m_i r_i^2.$$

*Момент інерції всього тіла* відносно осі $z$ дорівнює сумі моментів інерції всіх його точок відносно цієї осі:

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2.$$

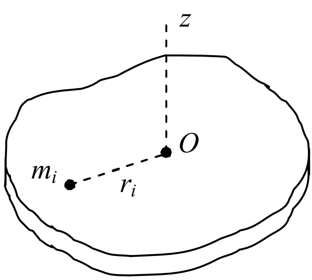

Рис. 1.6

Ця величина скалярна, одиниця вимірювання в СІ — кг·м$^2$.

Момент інерції має кожне тіло незалежно від його стану.

Як випливає з означення, момент інерції залежить не тільки від маси тіла, але й від того, як ця маса розподілена по об’єму тіла.

Наведемо вирази для моментів інерції деяких таких тіл відносно осі $z_c$, що проходить через центр мас тіла:

— *момент інерції суцільного однорідного диска або циліндра* з радіусом $R$ відносно осі симетрії (вісь циліндра):

$$I_c = {}^1\!/_2\, mR^2;$$

— *момент інерції обруча або тонкостінного порожнинного циліндра* з радіусом $R$ відносно осі симетрії (вісь перпендикулярна до площини обруча і проходить через його центр):

$$I_c = mR^2;$$

— *момент інерції суцільної кулі* з радіусом $R$ відносно осі, що проходить через центр кулі:

$$I_c = {}^2\!/_5\, mR^2;$$

— *момент інерції однорідного тонкого стрижня* довжиною $l$ відносно осі, що проходить через його середину перпендикулярно до $l$:

$$I_c = {}^1\!/_{12}\, mR^2;$$

— *момент інерції однорідного тонкого стрижня* відносно осі, що проходить через кінець стрижня:

$$I = {}^1\!/_3\, ml^2.$$

Як бачимо, момент інерції тіла залежить не тільки від маси, форми і розмірів тіла, а й від розміщення тіла відносно осі.

Можна обчислити момент інерції тіла відносно будь-якої осі. Для цього слід використовувати *теорему Штейнера*: момент інерції тіла $I$ відносно довільної осі $z$ дорівнює моменту інерції тіла $I_c$ відносно осі $z_c$, що проходить через його центр мас паралельно даній осі $z$, плюс добуток маси тіла $m$ на квадрат відстані $d$ між осями (рис. 1.7):

$$I = I_c + md^2.$$

Вираз отримано саме за допомогою цієї теореми:

$$I = \frac{1}{12} mR^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

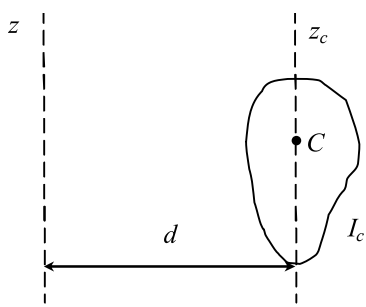

Рис. 1.7

*Моментом імпульсу* $\vec{L}_i$ матеріальної точки відносно точки $O$ називають векторний добуток радіуса-вектора цієї точки на її імпульс:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i\, \vec{p}_i].$$

Напрям вектора $\vec{L}$ визначається за правилом правого гвинта (рис. 1.8), одиниця вимірювання в системі СІ – кг · м$^2$/с$^2$.

Момент імпульсу АТТ відносно точки $O$ дорівнює векторній сумі моментів імпульсів його точок відносно точки обертання $O$:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \left[ \vec{r}_i \; \vec{p}_i \right],$$

де $\vec{r}_i$ – радіус-вектор кожної точки тіла відносно точки обертання $O$, $\vec{p}_i$ – імпульс кожної точки тіла.

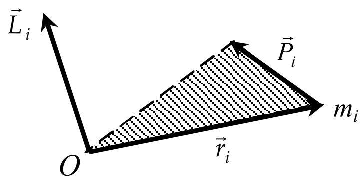


Рис. 1.8

Оскільки для обертального руху $v_i = \omega r_i$, то можна записати:

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \omega = \sum_{i=1}^{N} I_i \omega = \omega \sum_{i=1}^{N} I_i = I\omega ,$$

тобто момент імпульсу АТТ відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно тієї самої осі на кутову швидкість обертання:

$$L_z = I\omega .$$

### *1.2.5. Основне рівняння динаміки обертального руху абсолютно твердого тіла*

Вираз
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$
називають *основним рівнянням динаміки обертального руху АТТ* відносно нерухомої точки $O$. Воно свідчить про те, що похідна моменту імпульсу АТТ за часом дорівнює головному моменту діючих зовнішніх сил (моменти $\vec{L}$ і $\vec{M}$ визначені відносно однієї й тієї самої точки обертання $O$.)

Якщо врахувати, що момент інерції $I = \text{const}$ :

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon,$$

або $$M = I\varepsilon$$

Розглянуті рівняння нагадують записи другого закону Ньютона для поступального руху. Але роль маси відіграє момент інерції $I$, а роль лінійного прискорення – кутове прискорення ε, роль сили – момент сили $\vec{M}$, роль імпульсу – момент імпульсу $\vec{L}$.

### *1.2.6. Робота, потужність, коефіцієнт корисної дії*

Розглянемо матеріальну точку, яка рухається по довільній траєкторії $L$ під дією змінної сили $\vec{F}$ (рис. 1.9). Розіб'ємо цю траєкторію на елементарні переміщення $d\vec{r}$ так, щоб на кожному такому переміщенні діючу силу можна було б уважати сталою.

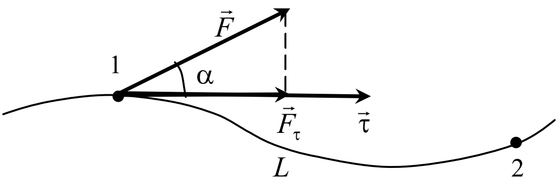


Рис. 1.9

Скалярний добуток сили $\vec{F}$ на переміщення $d\vec{r}$ називають *елементарною роботою* $\delta A$:

$$\delta A = \left(\vec{F}\, d\vec{r}\right) \quad \text{або} \quad \delta A = F|\, d\vec{r}\,|\cos\alpha,$$

де α — кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$.

Якщо $F_\tau > 0$, кут α гострий, то $\delta A > 0$. Відповідну силу часто називають *рушійною силою* (сила тяги літака, ракети тощо).

У разі $F_\tau < 0$, тобто коли кут α тупий, $\delta A < 0$ і відповідну силу називають *гальмівною силою* (наприклад, сила тертя або опору).

Якщо ж кут $\alpha = \pi/2$, то $\delta A = 0$ і відповідна сила роботи не виконує (наприклад, сила тяжіння при горизонтальному русі потягу або доцентрова сила).

*Повна робота сили* при переміщенні з точки 1 в точку 2 визначається сумою елементарних робіт, для обчислення якої треба зінтегрувати вираз елементарної роботи:

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_1^2 F_\tau |d\vec{r}|.$$

Якщо тіло рухається прямолінійно під дією сталої сили:

$$A = FS\cos\alpha.$$

Одиницею роботи в системі СІ є джоуль (Дж). 1 Дж = 1 Н · м.

У техніці (та й взагалі у повсякденному житті) дуже важливо, який час необхідно витратити на виконання певної роботи. Швидкість виконання роботи характеризують *потужністю*.

*Середньою потужністю* $\langle N\rangle$ називають фізичну величину, яка визначається відношенням всієї виконаної роботи $A$ до часу $\Delta t$, за який цю роботу було виконано: $\langle N\rangle=\dfrac{A}{\Delta t}$. Одиницею вимірювання потужності в СІ є Ват (Вт). 1 Вт = 1 Дж/с.

Вираз миттєвої потужності для поступального руху:

$$N=\frac{\left(\vec{F}\,d\vec{r}\right)}{dt}=\left(\vec{F}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\vec{F}\vec{v},$$

де $\vec{F}$ – діюча сила; $\vec{v}$ – миттєва швидкість тіла;
вираз миттєвої потужності для обертального руху

$$N=\frac{Md\varphi}{dt}=M\omega,$$

де $M$ – момент сили; $\omega$ – миттєва кутова швидкість обертання АТТ.

Характеристикою ефективності використання технічного пристрою є його *коефіцієнт корисної дії* (ККД).

ККД ($\eta$) визначається як відношення «корисних результатів» до «витрат». У механіці це може бути записано так:

$$\eta=\frac{A_{\text{кор}}}{A_{\text{витр}}};\quad \eta=\frac{N_{\text{кор}}}{N_{\text{витр}}},$$

де $A_{\text{кор}}$, $N_{\text{кор}}$ – корисні робота і потужність; $A_{\text{витр}}$, $N_{\text{витр}}$ – витрачені робота і потужність.

У реальності в будь-якому процесі присутні втрати корисної роботи, зокрема, за рахунок сил тертя, опору, тощо. Тому завжди $A_{\text{кор}}< A_{\text{витр}}$, $N_{\text{кор}}< N_{\text{витр}}$ і $\eta < 1$. ККД подають у десяткових дробах або відсотках.

### *1.2.7. Енергія. Види механічної енергії*

*Енергія* – загальна кількісна міра руху й взаємодії всіх видів матерії. Розглядають різні види енергії: механічну, внутрішню, електричну, ядерну та ін. Одиницею вимірювання енергії у системі СІ є джоуль (Дж).

У механіці розрізняють два види енергії – кінетичну $W$ та потенціальну $U$. *Повною механічною енергією* називають їхню суму. Розглянемо кожний із цих видів механічної енергії.

*Кінетичною енергією W* називають енергію тіла, що рухається, *кінетична енергія тіла* (*матеріальної точки*) при поступальному русі дорівнює:

$$W_к = \frac{mv^2}{2}.$$

Враховуючи, що імпульс $\vec{p} = m\vec{v}$, дістаємо:

$$W_к = \frac{p^2}{2m}.$$

*Кінетична енергія системи тіл* незалежно від того, взаємодіють вони між собою чи ні, дорівнює сумі кінетичних енергій окремих елементів системи, тобто є величиною адитивною

$$W_к = \sum_{i=1}^{N} W_{кi}.$$

Кінетична енергія є величиною відносною, як і швидкість, вона залежить від системи відліку.

*Кінетичної енергії АТТ, що обертається навколо нерухомої осі.*

$$W_к = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L_z\omega}{2} = \frac{L_z^2}{2I}.$$

Якщо швидкість тіла під дією сили $\vec{F}$ змінюється при поступальному русі від $\vec{v}_1$ до $\vec{v}_2$, то виконана при цьому робота сили дорівнюватиме зміні кінетичної енергії тіла:

$$A = \Delta W_к = \int_{v_1}^{v_2} dW_к = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

У разі обертального руху, коли кутова швидкість АТТ змінюється від $\omega_1$ до $\omega_2$, робота дорівнюватиме:

$$A_{12} = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}.$$

Робота дорівнює зміні кінетичної енергії, а саме різниці між її *кінцевим* і *початковим* значеннями

$$A_{12} = W_2 - W_1.$$

Якщо робота додатна $A_{12} > 0$, то вона приводить до збільшення кінетичної енергії $W_2 > W_1$, а від'ємна робота $A_{12} < 0$ – до зменшення кінетичної енергії $W_2 < W_1$.

*Кінетична енергія АТТ у разі плоского руху (кочення)*. Якщо тіло здійснює плоский рух, то його можна розглядати як накладання двох рухів – поступального руху центра мас із швидкістю $v_c$ і обертального руху з кутовою швидкістю ω навколо осі, яка перпендикулярна площині руху і проходить через центр мас. У цьому випадку кінетична енергія АТТ буде складатися з кінетичної енергії поступального руху зі швидкістю $v_c$ і кінетичної енергії обертального руху навколо осі, що проходить через центр мас тіла

$$W_{\text{к}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}.$$

*Потенціальна енергія.* Знайдемо потенціальну енергію для найбільш поширених випадків:

а) у полі пружної сили

$$U(r) = \frac{kr^2}{2};$$

б) у гравітаційному полі

$$U(r) = -\gamma\frac{m_1m_2}{r};$$

в) в однорідному полі сили тяжіння

$$U(h) = mgh.$$

### 1.2.8. Піднімальна сила крила літака

Силою, що підтримує літак у повітрі, є піднімальна сила крила літака. Лобовий опір відіграє при польоті літака негативну роль, тому крилам літака та його фюзеляжу придають обтічну форму у вигляді витягнутої краплі. Оптимальним для крила є переріз профілю (рис. 1.10), знайдений російським вченим Жуковським (1847 – 1921 р.). Йому першому вдалося пояснити механізм піднімальної сили, створюваної крилом аероплана під час руху.

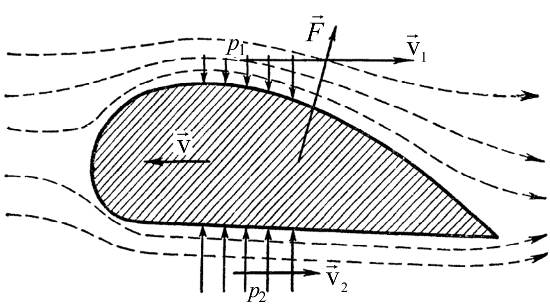


Рис. 1.10

На рис. 1.10 пунктиром зображені лінії течії зустрічного потоку повітря. Як видно з рисунку, над верхнею частиною крила відбувається ущільнення (згущення) цих ліній і збільшення відносної швидкості повітряного потоку. Згідно з рівнянням

Бернуллі тиск у потоці повітря над крилом стає меншим, ніж тиск під крилом. Саме за рахунок цієї різниці тисків виникає піднімальна сила $\vec{F}$, яка утримує при польоті літак у повітрі.

### *1.2.9. Задачі*

**Приклади розв'язання задач**

*Задача 1.* Паровий молот масою 2 т падає з висоти 2 м, створюючи під час удару силу $14,7\cdot 10^5$ Н. Визначити тривалість удару, якщо удар непружний.

*Розв'язання.* Для визначення тривалості удару скористаємось такою формою запису другого закону Ньютона: $\Delta(mv) = F\Delta t$.

Оскільки перед ударом молот мав імпульс $mv$, а після непружного удару молот зупинився і його імпульс став рівним нулю, зміна імпульсу $\Delta mv = mv$. Отже, $mv = F\Delta t$, де $v$ — кінцева швидкість молота перед ударом. Кінцева швидкість падіння з висоти $h$ дорівнює:

$$v = \sqrt{2gh}\,, \quad \text{тоді} \quad \Delta t = \frac{mv}{F} = \frac{m\sqrt{2gh}}{F}.$$

Оскільки формула загального розв'язку складна, спочатку перевіримо розмірність

$$[t] = \frac{\text{кг}\sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}}}{\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \text{с}.$$

Як бачимо, найменування лівої та правої частин формули однакові.

Задачу розв'язуємо в системі СІ. Підставивши числові значення величин, дістанемо: $$\Delta t = \frac{2000\sqrt{9,8\cdot 2\cdot 2}}{14,7\cdot 10^5} = 0,0085\,\text{с}.$$

*Відповідь*: $\Delta t$ = 0,0085 с.

*Задача 2.* Супутник рухається навколо Землі на відстані $h$ від її поверхні. Радіус Землі — $R$. Вважаючи орбіту супутника коловою, виразити швидкість руху і період обертання супутника через $h$, $R$ і прискорення вільного падіння на поверхні Землі $g$.

*Розв'язання.* Вважатимемо, що супутник рухається по коловій орбіті, центр якої міститься в центрі Землі. При цьому супутник рухається з доцентровим прискоренням

$$a_{\text{доц}} = \frac{v^2}{R+h},$$

де $v$ — швидкість руху супутника по орбіті.

Доцентрове прискорення супутника виникає під дією сили тяжіння
$$F = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2},$$

де $\gamma$ — гравітаційна стала; $m$ — маса супутника; $M$ — маса Землі.

За другим законом Ньютона

$$\frac{mv^2}{R+h} = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2}, \quad \text{звідки} \quad v^2 = \frac{\gamma M}{R+h}.$$

Величину $\gamma M$ можна визначити, розмірковуючи так. На тіло масою $m$, що перебуває на поверхні Землі, діє гравітаційна сила, напрямлена до центру земної кулі,

$$F = \frac{\gamma Mm}{R^2}.$$

Враховуючи, що прискорення вільного падіння на поверхні Землі дорівнює $g$, за другим законом Ньютона

$$mg = \frac{\gamma Mm}{R^2}, \quad \text{звідки} \quad \gamma M = gR^2.$$

Підставляючи значення $\gamma M$ у формулу для швидкості руху супутника, дістаємо

$$v = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}.$$

Оскільки період — це час, за який супутник виконує один оберт по орбіті й проходить шлях $2\pi(R+h)$, то, знаючи швидкість обертання, яка є сталою по величині, період можна знайти за формулою

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{R\sqrt{g}}.$$

*Відповідь:* $v = R\sqrt{\dfrac{g}{R+h}}$; $T = \dfrac{2\pi(R+h)^{3/2}}{R\sqrt{g}}$.

*Задача 3.* Дві маленькі кульки, кожна масою 20 г, з'єднано тонким однорідним стрижнем, довжина якого $l$ = 20 см і маса 60 г. Визначити момент інерції системи відносно осі, що перпендикулярна до стрижня та проходить через його середину.

*Розв'язання.* Момент інерції даної системи $I$ можна обчислити як суму моментів інерції двох кульок та стрижня, тобто $I = 2I_1 + I_2$.

Кульки можна вважати матеріальними точками, їхні моменти інерції $I_1 = m_1 r^2$, де $r$ — радіус обертання ($r$ = $l$/2). Момент інерції циліндричного стрижня відносно осі, що проходить через його центр мас та перпендикулярна до стрижня, знаходять за формулою $I_2 = \frac{1}{12} m_2 l^2$. Загальний момент інерції системи визначаємо за формулою $I = 2m_1 \frac{l^2}{2^2} + \frac{m_2 l^2}{12}$.

Задачу розв'язуємо в системі СІ. *Відповідь*: $I = 6 \cdot 10^{-4}$ кг · м$^2$.

*Задача 4.* Через блок у вигляді суцільного диска масою 80 г перекинуто нитку, до кінців якої підвішені тягарці масами 100 і 200 г (рис. 1.11). Визначити прискорення, з яким будуть рухатись тягарці, якщо їх відпустити. Тертя і масу нитки не враховувати.

*Розв'язання.* Для визначення прискорення тягарців скористаємось законами динаміки поступального та обертального рухів. Для цього розглянемо сили, які діють на кожний тягарець і на блок. На перший тягарець діють дві сили: сила тяжіння $m_1\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T_1}$. Сила тяжіння напрямлена вниз, а сила натягу — вгору. Прискорення меншого тягарця напрямлене вгору. Тоді другий закон Ньютона у скалярній формі для першого тягарця:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \text{, отже, } \quad T_1 = m_1 a + m_1 g .$$

За аналогією запишемо рівняння руху другого тягарця, його прискорення направлене вниз:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \text{, а } \quad T_2 = m_2 g - m_2 a .$$

Згідно з основним законом динаміки обертального руху $M = I\varepsilon$. Сили натягу нитки діють не тільки на тягарці, але і на диск. Сили $T_1'$ і $T_2'$, прикладені до ободу блока, дорівнюють силам $T_1$ і $T_2$. При цьому $T_1' < T_2'$. Обертальний момент, що діє на блок, дорівнює добуткові різниці сил натягу нитки на плече (радіус блока) $M = (T_2' - T_1')R$. Момент інерції блока дорівнює $I = \frac{1}{2} mR^2$. Лінійне прискорення тягарців дорівнює тангенціальному прискоренню точок поверхні блока, тому кутове прискорення

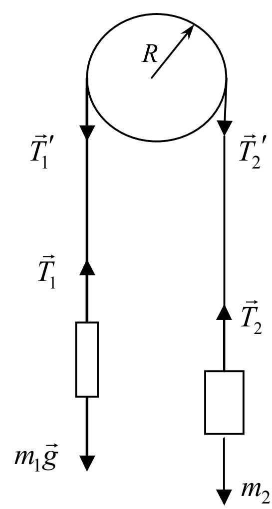

Рис. 1.11

блока запишемо як $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$.

Після підстановки виразів для ε і $M$ у формулу основного закону динаміки обертального руху маємо

$$(T_2' - T_1')R = \frac{mR^2}{2}\frac{a}{R}, \quad \text{звідки} \qquad T_2' - T_1' = \frac{m}{2}a\,.$$

Оскільки $T_1' = T_1$ і $T_2' = T_2$, то сили натягу $T_1'$ і $T_2'$ можна замінити на $T_1$ і $T_2$, таким чином отримуємо

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = \frac{m}{2}a\,,$$

або $\quad (m_2 - m_1)g = \left(m_2 + m_1 + \dfrac{m}{2}\right)a\,, \quad$ звідки $\quad a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \dfrac{m}{2}}g\,.$

Підставляючи до цієї формули числові значення величин в одиницях системи СІ, знаходимо

$$a = \frac{(0,2 - 0,1)}{(0,2 + 0,1 + 0,08/2)} \cdot 9,81 = 2,88 \text{ м/с}^2\,.$$

*Відповідь:* $a$ = 2,88 м/с$^2$.

*Задача 5.* Момент інерції маховика дорівнює 0,1 кг·м$^2$. Через який час маховик матиме частоту обертання $n$ = 1800 об/хв, якщо корисна потужність двигуна, що обертає маховик $N$ = 100 Вт?

*Розв'язання.* Час, протягом якого маховик набирає частоти обертання $n$, можна визначити, якщо буде відома робота, що її витратить двигун на розкручування маховика. За рахунок роботи двигуна маховик дістає кінетичну енергію, тобто $A = W$.

Роботу, витрачену на розкручування маховика, знаходимо за формулою $A = Nt$.

Кінетична енергія обертального руху тіла $W = \dfrac{I\omega^2}{2}$.

Кутову швидкість знайдемо через частоту обертання $\omega = 2\pi n$.

Прирівняємо два попередні вирази:

$$Nt = \frac{I\omega^2}{2}, \ \text{звідси} \ \ t = \frac{I\omega^2}{2N} = \frac{I(2\pi n)^2}{2N}\,.$$

Перевіримо одиницю виміру в системі СІ:

$$[t] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2\text{с}^{-2}}{\text{Дж/с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{Дж}} = \text{с}\,.$$

Підставимо в останню формулу числові значення в СІ:

$$t = \frac{0{,}1 \cdot 2^2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1800^2}{2 \cdot 100 \cdot 60^2} = 17{,}7\,\text{с}.$$

*Відповідь*: $t$ = 17,7 с.

**Аудиторні задачі**

1. Молот масою 10 кг вільно падає з висоти 1,25 м. Знайти силу удару, якщо тривалість його 0,01 с. (4950 Н)

2. Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденої тілом відстані від часу визначається рівнянням $s = A + Bt + Ct^2 - Dt^3$, де $C$ = 5 м/с$^2$ та $D$ = 1 м/с$^3$. Знайти силу, яка діє на тіло в момент $t$ = 1 с. (2 Н)

3. На столі лежить брусок масою 4 кг. До бруска прив'язали нитку і перекинули через невагомий блок. З яким прискоренням буде рухатися брусок, якщо до другого кінця нитки прив'язати тягарець, маса якого 1 кг? Тертя не враховувати. (1, 96 м/с$^2$)

4. Два тягарці масами 2 і 1 кг з'єднані ниткою, перекинутою через невагомий блок. Знайти прискорення, з яким рухаються тягарці, і силу натягу нитки. Тертям знехтувати. (3,27 м/с$^2$; 13,1 Н)

5. Похила площина утворює кут 25° з площиною горизонту й має довжину 2 м. Тіло, рухаючись рівноприскорено, зісковзнуло з цієї площини за 2 с. Визначити коефіцієнт тертя тіла об площину. (0,35)

6. Через блок у вигляді суцільного диска масою 1 кг перекинуто нитку, до кінців якої підвішені тягарці масами 2 і 1 кг. Знайти прискорення руху тягарців і сили натягу $T_1$ і $T_2$ нитки, до кінців якої підвішені тягарці. (2,8 м/с$^2$; $T_1$ = 14 Н; $T_2$ = 12,6 Н)

7. На барабан радіусом 0,5 м намотано нитку, до кінця якої підвішений тягарець масою 10 кг. Знайти момент інерції барабана, коли відомо, що тягарець падає з прискоренням 2 м/с$^2$. (9,75 кг·м$^2$)

8. До ободу однорідного диска радіусом 0,2 м прикладена дотична сила 98 Н. При обертанні на диск діє момент сили тертя 4,9 Н·м. Знайти масу диска, коли відомо, що диск обертається з кутовим прискоренням 100 с$^{-2}$. (7,35 кг)

9. Колесо, яке обертається з постійним кутовим прискоренням, зменшило за одну хвилину частоту обертання від 300 до 180 об/хв. Момент інерції колеса 2 кг·м$^2$. Знайти кутове прискорення колеса, момент сил гальмування, роботу сил гальмування, кількість обертів, зроблених колесом за 1 хв. (0,21 с$^{-2}$; 0,42 Н·м; 631 Дж; 239 об.)

10. До ободу однорідного диска масою 5 кг прикладена дотична сила 19,6 Н. Яку кінетичну енергію матиме диск через 5 с після початку дії сили? (1,92 кДж)

## *1.3. НАВЧАЛЬНИЙ ЕЛЕМЕНТ ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ*

### *1.3.1. Закони збереження в механіці*

Закони збереження можуть бути загальними та частинними. Закони збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу виконуються в усіх фізичних явищах, вони є загальними законами, а закон збереження механічної енергії виконується тільки в механічних процесах, тому він є частинним законом.

Нагадаємо, що відносно до механічної системи розрізняють внутрішні і зовнішні сили. Система, на яку зовнішні сили не діють, називають *замкненою системою*. Зрозуміло, що в земних умовах замкнених систем немає хоча б тому, що завжди діють сили тяжіння. Проте реальну систему можна вважати замкненою, якщо всередині замкненої системи сили взаємодії набагато більші від зовнішніх сил або рівнодійна зовнішніх сил дорівнює нулю.

Будемо розглядати закони збереження для замкнених (ізольованих) механічних систем в інерціальних системах відліку.

*Закон збереження імпульсу:* в замкненій системі сумарний імпульс усіх тіл (матеріальних точок, частинок) є величиною сталою:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \mathrm{const}\ .$$

Отже, за відсутності зовнішніх сил імпульс системи залишається сталим. Внутрішні сили взаємодії не можуть змінити імпульс системи, хоча імпульси окремих матеріальних точок або частин замкненої системи можуть змінюватися з плином часу. Але *приріст* імпульсу однієї частини системи дорівнює *зменшенню* імпульсу іншої частини замкненої системи.

*Закон збереження моменту імпульсу*: в замкненій системі сумарний момент імпульсу всіх тіл (матеріальних точок, частинок) є величиною сталою:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \mathrm{const}\ .$$

*Закон збереження механічної енергії.* Робота консервативних сил, що діють на матеріальну точку (частинку), дорівнює зменшенню потенціальної енергії

$$A_{12} = U_1 - U_2\ .$$

Цю саму роботу можна подати як приріст кінетичної енергії

$$A_{12} = W_2 - W_1\ .$$

Отже, робота консервативних сил щодо *зменшення* потенціальної енергії матеріальної точки витрачається на *приріст* кінетичної енергії.

Прирівнюючи ці два вирази, знаходимо $U_1 - U_2 = W_2 - W_1$, звідси випливає, що повна механічна енергія $E$ матеріальної точки у зовнішньому полі консервативних сил залишається сталою величиною

$$E \equiv U_1 + W_1 = W_2 + U_2 = \text{const} .$$

Це закон збереження механічної енергії у зовнішньому полі консервативних сил: *повна механічна енергія системи невзаємодіючих матеріальних точок (частинок), на які діють лише консервативні сили зовнішнього поля, залишається сталою*.

Це є один з головних законів механіки – *закон збереження механічної енергії*.

Якщо ж у механічній системі діють сили тертя або опору, механічна енергія поступово зменшується за рахунок перетворення в інші види енергії (наприклад, у теплову). Цей процес, як вже зазначалося, називають дисипацією (розсіюванням) енергії. Механічна енергія не зберігається, але виконується загальнофізичний закон збереження енергії.

*Загальнофізичний закон збереження енергії:* енергія не виникає з нічого і не зникає безслідно; вона може тільки передаватись від одних фізичних систем до інших або переходити з одного виду в інший в еквівалентних кількостях.

### *1.3.2. Рух тіла змінної маси. Реактивний рух*

Існують багато випадків, коли маса тіла змінюється підчас руху за рахунок неперервного відокремлення або приєднання речовини. Наприклад, маса ракети зменшується за рахунок дуже швидкого витоку газів, які утворюються під час згорання палива. При викиданні газів в одному напрямі ракета отримує імпульс у протилежному напрямі. У цьому полягає фізичний зміст реактивного руху, який використовують в різноманітних літальних апаратах.

Виведемо рівняння руху ракети як тіла змінної маси $m = m(t)$, траєкторія ракети – пряма лінія. Розглянемо систему ракета – гази як спільну механічну систему. Якщо така система замкнена (ізольована), то для неї справедливий закон збереження імпульсу, тобто сума імпульсів ракети й газів залишається сталою.

Нехай у початковий момент часу $t$ маса ракети разом із газами $m$, а її швидкість відносно інерціальної системи відліку $\vec{v}$. Відповідно імпульс системи ракета – гази дорівнюватиме

$\vec{p}_{\text{рак}1} = m\vec{\text{v}}$. Через час $dt$ маса і швидкість ракети дістануть *прирости* $dm$ і $d\vec{v}$ (приріст $dm$ – від'ємна величина!). Імпульс ракети дорівнюватиме $\vec{p}_{\text{рак}2} = (m + dm)(\vec{\text{v}} + d\vec{\text{v}})$, а імпульс газів $\vec{p}_{\text{газ}2} = dm_{\text{газ}}\vec{\text{v}}_{\text{газ}}$, де $dm_{\text{газ}}$ – маса газів, утворених за час $dt$, а $\vec{\text{v}}_{\text{газ}}$ – швидкість витоку газів відносно *інерціальної* системи відліку. У момент часу $t + dt$ сумарний імпульс системи ракета – гази дорівнюватиме $\vec{p}_2 = \vec{p}_{\text{рак}2} + \vec{p}_{\text{газ}2}$, а приріст імпульсу всієї системи за час $dt$:

$$d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (\vec{p}_{\text{рак}2} + \vec{p}_{\text{газ}2}) - \vec{p}_{\text{рак}1},$$

або

$$d\vec{p} = (m + dm)(\vec{\text{v}} + d\vec{\text{v}}) + dm_{\text{газ}}\vec{\text{v}}_{\text{газ}} - m\vec{\text{v}}.$$

Розкривши дужки та знехтувавши нескінченно малою величиною $dm \cdot d\vec{\text{v}}$ другого порядку, дістанемо:

$$d\vec{p} = md\vec{\text{v}} + dm\vec{\text{v}} + dm_{\text{газ}}\vec{\text{v}}_{\text{газ}}.$$

Із закону збереження маси ($dm + dm_{\text{газ}} = 0$) випливає, що $dm_{\text{газ}} = -dm$. Підставимо це значення в попередній вираз

$$d\vec{p} = md\vec{\text{v}} + dm\vec{\text{v}} - dm\vec{\text{v}}_{\text{газ}} = md\vec{\text{v}} - dm(\vec{\text{v}}_{\text{газ}} - \vec{\text{v}}).$$

Різниця $\vec{u} = \vec{\text{v}}_{\text{газ}} - \vec{\text{v}}$ – швидкість витоку газів відносно *ракети* (швидкість газового струменя), отже остаточно

$$d\vec{p} = md\vec{\text{v}} - \vec{u}dm.$$

Проаналізуємо цей вираз у випадках, коли зовнішні сили *діють* а) і *не діють* б) на ракету (під зовнішніми силами розуміють сили тяжіння біля поверхні планет, гравітаційні сили притягання, сили опору повітря).

а). Нехай на ракету діють зовнішні сили. Позначимо їх рівнодійну $\vec{F}$. Тоді за другим законом Ньютона $d\vec{p} = \vec{F}dt$,

і з урахуванням попередньої формули, дістаємо $md\vec{v} - \vec{u}dm = \vec{F}dt$. Поділивши вираз на *dt*, знаходимо

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Цей вираз називають *рівнянням Мещерського*. В рівнянні Мещерського до зовнішньої сили $\vec{F}$ додається внутрішня сила взаємодії $\vec{u}\dfrac{dm}{dt}$. Вона характеризує дію на ракету частинок газу, що відокремлюються від неї. Її називають *реактивною силою*:

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = \vec{u}\frac{dm}{dt} = \mu\vec{u},$$

де $\mu = dm / dt$ – маса газів, що відокремлюються за одиницю часу, тобто це є витрати пального за одиницю часу.

Як бачимо, реактивна сила пропорційна добутку маси газів, що відокремлюються за одиницю часу, та швидкості газового струменя. Остання може змінюватися під час польоту, але найважливішим є випадок, коли вона стала.

Очевидно, якщо маса відокремлюється, то приріст маси від'ємний $\mu = dm / dt < 0$ і вектор реактивної сили $\vec{F}_{\text{реакт}}$ протилежний до вектора $\vec{u}$ швидкості газового струменя. Якщо маса приєднується, то приріст маси додатній $\mu = dm / dt > 0$ і вектор $\vec{F}_{\text{реакт}}$ збігається за напрямом з вектором $\vec{u}$.

б). Якщо на ракету зовнішні сили не діють (політ у космічному просторі на великій відстані від планет), то маємо замкнену систему. Відповідно до закону збереження імпульсу $d\vec{p} = 0$, отже

$$md\vec{v} = \vec{u}dm .$$

Це означає, що ракета рухається тільки під дією реактивної сили. Визначимо, якої максимальної швидкості набуде при цьому ракета.

Вважатимемо, що траєкторія ракети – пряма лінія, а її початкова швидкість дорівнює нулю. Якщо напрям руху ракети прийняти за додатній, то проекція вектора $\vec{u}$ на цей напрям буде від'ємною, тобто напрями векторів $\vec{v}$ і $\vec{u}$ протилежні. Тоді попередній вираз у скалярному вигляді можна записати так:

$$dv = -u\frac{dm}{m} .$$

Позначимо стартову масу ракети через $m_0$; її кінцева маса після повного вигоряння палива масою $m_п$ буде $(m_0 - m_п)$. Тоді максимальну швидкість ракети $v_{\max}$ при зміні її маси від $m_0$ до $m_0 - m_п$ можна знайти інтегруванням попереднього виразу:

$$v_{\max} = -u\int_{m_0}^{m_0 - m_п}\frac{dm}{m} = u\ln\frac{m_0}{m_0 - m_п} .$$

Вираз

$$v_{\max} = u\ln\frac{m_0}{m_0 - m_п}$$

називають *формулою Ціолковського.*

За цією формулою можна розрахувати запас палива, необхідний для надання ракеті певної швидкості $v$. Бачимо, що чим більша швидкість газового струменя $u$, тим більшою може бути корисна маса ракети $(m_0 - m_п)$.

### *1.3.3. Удар*

Взаємодію між тілами називають *ударом*, якщо:

— удар відбувається за дуже короткий час;

— внутрішні сили взаємодії при ударі настільки великі, що зовнішніми силами можна знехтувати і розглядати тіла, що співударяються, як замкнену систему.

Введемо такі умови:

- тіла до і після удару рухаються вздовж прямої, що проходить через їхні центри мас, тобто удар є центральним;
- тіла рухаються поступально (не обертаючись);
- сили тертя не враховуються.

Розглянемо два граничних випадки центрального удару – абсолютно пружний і абсолютно непружний удар.

1. *Абсолютно пружним* називається удар, під час якого механічна енергія тіл, що співударяються, зберігається. Це означає, що та частина кінетичної енергії, яка під час удару перейшла в потенціальну енергію пружної деформації, після удару без втрат знову перетворюється в кінетичну енергію. Тому при абсолютно пружному ударі виконуються два закони: збереження механічної енергії та збереження імпульсу.

Нехай два абсолютно пружних тіла з масами $m_1$ і $m_2$ рухаються вздовж осі $x$ зі швидкостями відповідно $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$ (рис. 1.12, *а, б*). Тіла рухаються назустріч одне одному або тіло $m_1$, що рухається позаду, наздоганяє переднє тіло $m_2$. В обох випадках виконується умова $\left|\vec{v}_1\right| > \left|\vec{v}_2\right|$. Після абсолютно пружного удару вони набувають швидкостей відповідно $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ (рис. 1.12, *в*).

Оскільки удар центральний і рух одномірний, то в подальшому символи векторів можна опустити, при цьому додатне значення швидкості припишемо рухові праворуч, від'ємне – ліворуч.

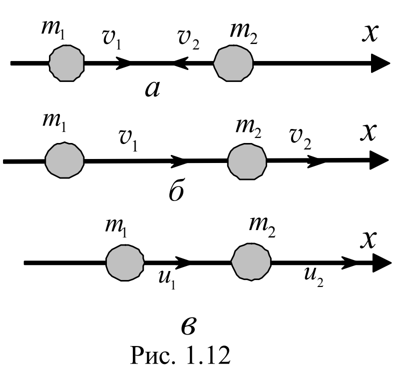


Рис. 1.12

Запишемо закон збереження механічної енергії (у даному випадку вона складається лише з кінетичної енергії, потенціальна дорівнює нулю) та закон збереження імпульсу спочатку для випадку, зображеному на рис. 1.12, *б* і рис. 1.12, *в*:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2}, \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \end{cases}$$

Перенесемо члени з $m_1$ ліворуч, а члени з $m_2$ – праворуч

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2),$$

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2).$$

Поділивши почленно перше рівняння на друге, дістанемо

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2.$$

Вирішуючи спільно систему рівнянь, знаходимо

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Проаналізуємо ці вирази для окремих випадків:

а) маси тіл однакові ($m_1 = m_2 = m$), тоді $u_1 = v_2$ і $u_2 = v_1$, тобто під час удару тіла обмінюються швидкостями. Якщо ж до удару одне тіло було нерухомим, то після удару нерухомим буде друге.

б) маса одного тіла значно більша за масу другого тіла (наприклад, $m_2 >> m_1$). Тоді

$$u_1 \approx 2 v_2 - v_1 \quad \text{і} \quad u_2 \approx v_2.$$

Отже, швидкість масивного тіла практично не змінюватиметься. Коли масивне тіло нерухоме (наприклад стіна), то $v_2 = 0$ і $u_1 = -v_1$, тобто тіло, що рухається, відскакує в протилежний бік з такою самою швидкістю. Таке зіткнення, наприклад, відбувається під час удару молекули о стінку циліндричної посудини, при цьому зміна (приріст) імпульсу молекули

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -m_1 v_1 - m_1 v_1 = -2 m_1 v_1.$$

Відповідно до закону збереження імпульсу такий самий імпульс, але з протилежним знаком передається стінці. Отже, з боку молекули на стінку діятиме сила $F = 2 m_1 v_1 / \Delta t$. Сумарна дія цих сил з боку багатьох молекул і створює тиск газу на стінки посудини.

Вочевидь, що у разі руху тіл назустріч одне одному (рис. 1.12, *а*), швидкості $v_2$ слід приписати від’ємний знак.

2. *Абсолютно непружним ударом* називають зіткнення двох тіл, у результаті якого тіла об'єднуються і рухаються далі разом. Зрозуміло, що в цьому випадку закон збереження механічної енергії не виконується (кінетична енергія частково перетворюється в енергію пластичної деформації, тепло і таке інше), а закон збереження імпульсу – виконується.

Нехай до удару швидкості тіл з масами $m_1$ і $m_2$ були відповідно $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$, а після удару обидва тіла почали рухатись разом зі швидкістю $\vec{u}$ (рис. 1.13)

Застосувавши закон збереження імпульсу

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u \ ,$$

дістаємо вираз для швидкості тіл після удару

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \ .$$

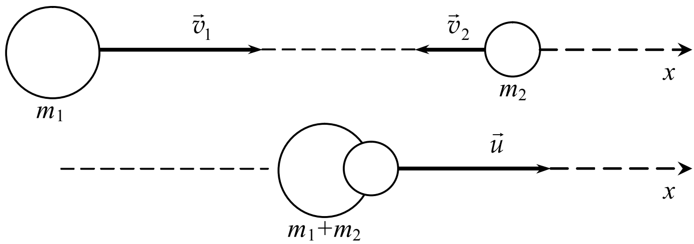


Рис. 1.13

Отже, якщо тіла рухались назустріч одне одному, то після удару вони будуть рухатись у той бік, куди рухалось тіло, яке мало більший імпульс.

У разі руху тіл за одним напрямом $x$ (наприклад, тіло $m_2$ рухається вздовж додатного напряму $x$, а тіло $m_1$ його наздоганяє) об'єднане тіло буде рухатися в тому самому напрямі зі швидкістю

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \ .$$

Для останнього випадку розрахуємо втрату механічної енергії системи. Очевидно, що вона дорівнює зменшенню енергії до і після удару:

$$\Delta E = \frac{m_1^2 v_1^2}{2} + \frac{m_2^2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} \ ,$$

або $$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 \ .$$

Якщо тіло $m_2$ у початковий момент часу було нерухомим ($v_2 = 0$), то

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2};$$

$$\Delta E = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

а за умови $m_2 >> m_1$ швидкість $u \approx 0$ і $\Delta E \approx \frac{m_1 v_1^2}{2}$,

тобто практично вся кінетична енергія рухомого тіла $m_1$ при ударі з масивним нерухомим тілом $m_2$ перетворюється в інші форми енергії. Ось чому в кувальному виробництві використовують масивні ковадла, щоб більша частина кінетичної енергії молота перетворювалась у незворотну деформацію кування.

Навпаки, в будівництві при забиванні бетонних паль необхідно мати якомога більшу масу молота $m_1 >> m_2$, тоді $u \approx v_1$ і практично вся енергія удару молота $m_1 u^2 / 2$ витрачатиметься на подолання опору ґрунту, а не на залишкову деформацію тіла $\Delta E \approx m_2 u^2 / 2 << m_1 u^2 / 2$.

### *1.3.4. Задачі*

**Приклади розв'язування задач**

*Задача 1.* Людина знаходиться в центрі горизонтальної круглої платформи, що обертається навколо осі, яка проходить через центр мас людини та платформи. Людина тримає в руках горизонтальну штангу довжиною $l = 2\,\text{м}$ та масою $m = 18\,\text{кг}$. Платформа при цьому робить $n = 30$ обертів за хвилину. Людина повертає штангу у вертикальній площині на кут $\varphi = 60°$. Визначити кутову швидкість платформи після повороту штанги та роботу, яку виконала людина при цьому. Момент інерції людини вважати еквівалентним масі $m_0 = 50\,\text{кг}$, що міститься на відстані $r_0 = 4\,\text{см}$ від осі обертання. Момент інерції платформи не враховувати.

*Розв'язання.* Розглядаючи платформу, що обертається з людиною, як замкнену систему, можна вважати, що момент імпульсу системи лишається сталим.

Закон збереження моменту імпульсу для даної системи запишеться у вигляді

$$(I_0 + I_1)\omega_1 = (I_0 + I_2)\omega_2,$$

де момент інерції людини $I_0 = m_0 r_0^2$ ; момент інерції горизонтальної штанги
$$I_1 = \frac{ml^2}{12};$$
момент інерції штанги, нахиленої під кутом $\varphi = 60°$,
$$I_2 = \frac{1}{12} m(l \cdot \cos\varphi)^2.$$

Кутова швидкість після нахилу штанги визначається із закону збереження моменту імпульсу $\omega_2 = \frac{I_0 + I_1}{I_0 + I_2}\omega_1 = \frac{I_0 + I_1}{I_0 + I_2} 2\pi n$.

Підставляючи в останню формулу числові значення величин в одиницях системи СІ, знаходимо значення кутової швидкості
$$\omega_2 = \frac{50 \cdot 0{,}0016 + \frac{18 \cdot 4}{12}}{50 \cdot 0{,}0016 + \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 18} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 = 12{,}1\,\text{с}^{-1}.$$

Робота, виконана людиною при повороті штанги, дорівнює зміні кінетичної енергії системи:
$$A = \frac{(I_0 + I_2)\omega_2^2}{2} - \frac{(I_0 + I_1)\omega_1^2}{2}.$$

Підставивши в цю формулу числові значення величин в одиницях системи СІ, дістанемо:
$$A = \frac{1{,}58 \cdot 12{,}1^2}{2} - \frac{6{,}08 \cdot 3{,}14^2}{2} = 85{,}7\,\text{Дж}.$$

*Відповідь*: $\omega = 12{,}1$ с$^{-1}$; $A = 85{,}7$ Дж.

*Задача 2.* На яку відстань під гору може викотитись обруч, якщо його початкова швидкість $v = 7{,}2$ км/год, а підйом дороги $H = 0{,}1$ м на кожний 1 м шляху. Тертя не враховувати.

*Розв'язання.* Відстань під гору, яку пройде обруч, рухаючись по дорозі, можна визначити, якщо буде відома висота $h$, на яку підніметься обруч, оскільки $s = h / \sin\alpha$, де $\alpha$ — кут нахилу дороги до горизонту (див. рис. 1.14). За умовою задачі
$$\sin\alpha = H / S.$$

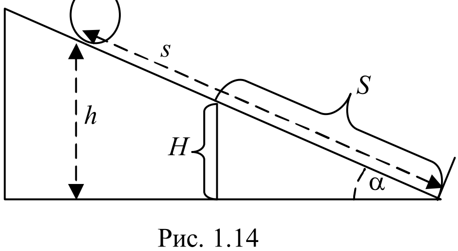

Рис. 1.14

Висота підйому обруча буде залежати від його повної кінетичної енергії перед початком підйому.

Повна кінетична енергія $W$ дорівнює сумі його кінетичної енергії $W_1$ поступального та $W_2$ обертального рухів, тобто

$$W = W_1 + W_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

де $I = mR^2$ — момент інерції обруча; $\omega R = v$, тому

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Ця кінетична енергія обруча при його підйомі перетворюється на потенціальну енергію $mgh$. Оскільки тертя не враховується, ми можемо використати закон збереження механічної енергії. Прирівняємо вирази кінетичної і потенціальної енергій

$$mgh = mv^2, \quad \text{або} \quad gs \sin\alpha = v^2.$$

Розв'язавши рівняння відносно відстані $s$, знайдемо:

$$s = v^2 / g \sin\alpha, \qquad s = \frac{v^2 S}{gH}.$$

Підставляючи у формулу числові значення величин, узятих в одиницях системи СІ (7,2 км/год = 2 м/с), знаходимо

$$s = 2^2 \cdot 1 / 9{,}8 \cdot 0{,}1 = 4{,}08 \text{ м}.$$

*Відповідь*: $s$ = 4,08 м.

## Аудиторні задачі

1. У човні масою 240 кг стоїть людина масою 60 кг. Човен пливе зі швидкістю 2 м/с. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямі зі швидкістю 4 м/с (відносно човна). Знайти швидкість човна після стрибка людини у двох випадках:

а) людина стрибає вперед за рухом човна; б) у протилежний бік відносно руху човна. (а: 1 м/с; б: 3 м/с)

2. Куля, що летить горизонтально, влучає в кулю, підвішену на невагомому жорсткому стрижні, і застряє в ній. Маса кулі, що летить, в 1000 разів менша за масу кулі на стрижні. Відстань від центра кулі до точки підвісу стрижня 1 м. Знайти швидкість першої кулі, якщо стрижень з другою кулею відхилився після удару на кут 10°. (542 м/с)

3. На барабан радіусом 20 см, момент інерції якого 0,1 кг·м$^2$, намотано нитку, до кінця якої підвішений тягарець масою 0,5 кг. До початку руху барабана висота тягарця над підлогою 1 м. Через який час тягарець опуститься до підлоги? Знайти кінетичну енергію тягарця перед дотиком до підлоги і силу натягу нитки. Тертям знехтувати. (1,1 с; 0,81 Дж; 4,1 Н)

4. Металева кулька, яка котиться по горизонтальній поверхні зі швидкістю 1 м/с, потрапляє на похилу площину і викочується по ній угору без тертя. На яку максимальну висоту підніметься кулька? (0,071 м)

## *1.4. НАВЧАЛЬНИЙ ЕЛЕМЕНТ ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ*

Виконання кожної лабораторної роботи складається з таких елементів:

- підготовка до лабораторної роботи, тобто вивчення відповідного теоретичного матеріалу та інструкції до роботи, підготовка протоколу роботи;
- допуск до виконання роботи;
- проведення експериментальних вимірювань;
- обробка результатів вимірювань, оформлення протоколу;
- захист лабораторної роботи.

Для правильного оформлення протоколів та грамотної обробки результатів вимірювань далі наведено правила округлювання чисел, побудови графіків, а також загальні вказівки щодо оформлення лабораторної роботи.

### *1.4.1. Правила заокруглення чисел*

Округлювання чисел застосовують у випадках, коли точне обчислення неможливе або нераціональне. У результаті округлювання дістають наближені числа.

Наближені числа виникають також у результаті вимірювання фізичних величин. Точність наближеного числа характеризує його дробова частина: у ній записують тільки «безсумнівно правильні» цифри. Запис наближеного числа може закінчуватись нулем, це означає, що цифра 0 правильна. Так, записи 2,40 та 2,4 мають різний зміст.

Якщо наближене число має зайві або неправильні знаки, його треба округлити. При цьому останню цифру, яку залишають:

— не змінюють, якщо перша з цифр, які відкидають, менша за 5;

— збільшують на одиницю, якщо перша з цифр, які відкидають, більша за 5, або дорівнює 5;

При обчисленні з наближеними числами кінцевий результат не може містити більше значущих цифр, ніж найменш точне число, наведене у вихідних даних. У проміжних обчисленнях можна залишити на один-два розряди більше.

### *1.4.2. Правила побудови графіків*

При побудові графіків по осі абсцис (горизонтальна вісь) відкладають незалежну змінну, по осі ординат (вертикальна вісь) —залежну змінну. Наприклад, для побудови вольт-амперної характеристики $I = f(U)$ по осі абсцис відкладають напругу $U$, а по осі ординат — струм $I$ (рис. 1.15)

Осі розмічають відповідно до вибраного масштабу. Він має бути таким, щоб графік був наочним і за ним легко визначались числові значення величин. Масштаб зручно виражати кількістю одиниць вимірювання в одному сантиметрі: 1 см має містити 1; 2; 2,5; 4 або 5 одиниць вимірювання.

У ряді випадків одиниці вимірювань помножують на $10^n$, де $n$ — показник степеня, він може бути додатний або від'ємний. Множник $10^n$ ставлять тільки в кінці відповідної осі. Замість множника $10^n$ дозволяється застосовувати скорочені позначення кратних і дольних одиниць. На перетині координатних осей може міститися нуль або, в разі необхідності, інше число.

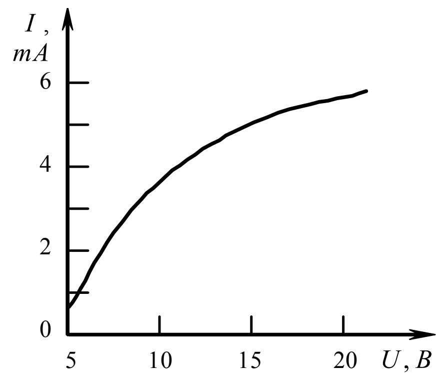

Рис. 1.15

Експериментальні точки на графіках мають бути добре помітними. Криві, як правило, мають форму плавної лінії. Її проводять поблизу експериментальних точок так, щоб ці точки були розміщені досить рівномірно по обидва боки від кривої.

### *1.4.3. Правила складання протоколу лабораторної роботи*

До протоколу входять:

- ✓ мета роботи;
- ✓ завдання;
- ✓ прилади та обладнання;
- ✓ схема установки та метод вимірювання (з робочими формулами);
- ✓ таблиці вимірювань та обчислень;
- ✓ обробка результатів вимірювань з обчисленням похибок та побудовою графіків;
- ✓ запис результатів вимірювань з наведенням значень похибок;
- ✓ висновки.

У висновках слід оцінити отримані результати з погляду виконання завдання роботи, дати оцінку точності вимірювань і вказати на можливі причини похибок.

### *1.4.4. Похибки вимірювань фізичних величин*

**Класифікація вимірювань**

Вимірювання фізичних величин є метою кожної лабораторної роботи. *Вимірювання* — це порівняння даної фізичної величини з відомою величиною, узятою за одиницю вимірювання. У результаті встановлюється, у скільки разів вимірювана величина більша або менша від одиниці вимірювання.

За способом знаходження результату вимірювання поділяють на два основні види: прямі і непрямі. *Прямі* — вимірювання, в яких шукане значення величини знаходять безпосередньо з досліду, порівнюючи його з мірою цієї величини за допомогою відлікового пристрою вимірювального приладу. Прикладом найпростіших прямих вимірювань може бути вимірювання довжини лінійкою, сили струму — амперметром, проміжків часу — секундоміром і т. д.

*Непрямі* — вимірювання, результат яких розраховують за відомою залежністю від результатів прямих вимірювань. Наприклад, об'єм прямокутного паралелепіпеда може бути знайдений за формулою $V = a \cdot b \cdot c$, де $a$, $b$, $c$ — ребра паралелепіпеда.

**Похибки прямих вимірювань**

Метою вимірювання фізичної величини є не тільки знаходження значення фізичної величини, а й оцінювання його відхилення від істинного значення. Обов'язково потрібно вказувати точність, гарантовану даним вимірюванням, або його похибку. Розрізняють абсолютні та відносні похибки.

Похибку, виражену різницею між виміряним $x$ і істинним $X$ значеннями величини, називають *абсолютною похибкою вимірювання*. Вона визначається за формулою $\Delta x = x - X$.

Істинне значення нам невідоме, тому замість нього беруть середнє арифметичне всіх виміряних значень. Виміряне значення $x$ може бути як більше, так і менше від істинного значення $X$, тому абсолютна похибка може бути як додатною, так і від'ємною, що позначають як $\pm\Delta x$.

Але абсолютна похибка не дає уявлення про точність вимірювання, оскільки вона не порівнюється із самою виміряною величиною. Точність вимірювання характеризує *відносна похибка*.

Відносну похибку визначають відношенням абсолютної похибки до дійсного (середнього арифметичного) значення величини. Цю похибку виражають у процентах

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{X} \cdot 100\,\%\,.$$

Похибки вимірювань за характером і причинами їх появи поділяють на три класи: систематичні, випадкові та промахи.

## Систематична похибка

Систематична похибка — це та частина загальної похибки вимірювання, яка залишається сталою або змінюється закономірно при повторних вимірюваннях тієї самої величини. Систематична похибка має знак і викликає відхилення результату завжди в один бік. Її небезпека в тому, що спостерігач частіше за все просто не підозрює про існування такої похибки.

Причини виникнення систематичної похибки такі:

— неправильне градуювання приладу або його несправність;

— неправильне встановлення приладу та погані умови його роботи;

— невдалий вибір методу дослідження і т. д.

Виявлення, оцінювання та позбавлення від систематичних похибок є головними завданнями дослідника. Для цього необхідно ретельно готувати вимірювання і продумувати його методику. Наприклад, якщо шкала приладу зміщена, то всі вимірювання матимуть сталу похибку, що дорівнює величині зміщення.

Не можна повністю позбавитися систематичної похибки. Завжди існує власна похибка навіть у справного приладу, зумовлена недоліками його виготовлення. Таку похибку називають інструментальною похибкою.

Поділки на шкалі приладу роблять відповідно до його інструментальної похибки. Лінійку градуюють через 1 мм, а мікрометр має поділки, що дорівнюють одній сотій міліметра. Інколи за *інструментальну похибку беруть половину найменшої ціни поділки.*

## Випадкова похибка

*Випадкова похибка* - складова загальної похибки, що змінюється довільним чином при повторних вимірюваннях однієї величини.

Поява випадкових похибок зумовлена конструкцією приладу (тертя між деталями і т. п.), зміною зовнішніх умов (коливання температури, вібрації та ін.), а також впливом самого спостерігача. Неможливо позбавитися випадкових похибок, але ми можемо зменшити їх вплив на кінцевий результат, використовуючи методи математичної статистики, які дозволяють визначити, яке зі значень найближче до істинного, та знайти похибку цього значення.

Теорія похибок установлює:

1. При багатократному вимірюванні однієї і тієї самої величини однакова ймовірність одержання значень як більших за істинне, так і менших, тому *найближчим до істинного значення буде середнє арифметичне значення* $\langle x \rangle$ ряду окремих вимірювань $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$.

$$\langle x\rangle = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

де $n$ — кількість вимірювань.

Значення $\langle x\rangle$ тим ближче до істинного, чим більшу кількість вимірювань проведено.

2. Результати окремих вимірювань відрізняються від $\langle x\rangle$, цю різницю називають *відхиленням від середнього арифметичного*

$$\Delta x_i = \langle x\rangle - x_i.$$

Ця різниця є випадковою величиною. Середнє значення похибки окремого вимірювання характеризує *середня квадратична похибка окремого вимірювання (середньоквадратичне відхилення окремого вимірювання)*

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i^2)}{n-1}}.$$

Підкреслимо, що $S_n$ характеризує похибку окремого вимірювання. Не менш важливо знати похибку, з якою визначене середнє (найбільш вірогідне) значення величини $\langle x\rangle$.

4. У теорії похибок доводиться, що *середня квадратична похибка середнього арифметичного (середньоквадратичне відхилення середнього арифметичного)*

$$\overline{S}_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i^2)}{n(n-1)}}.$$

Легко помітити, що середня квадратична похибка середнього арифметичного менша за середню квадратичну похибку окремого результату в кількість разів, що дорівнює кореню квадратному від кількості вимірювань $\overline{S}_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$, звідки випливає висновок: якщо необхідно зменшити похибку результату серії вимірювань у 2 рази, кількість вимірювань потрібно збільшити у 4 рази, для зменшення похибки у 3 рази кількість вимірювань збільшують у 9 разів і т. д.

Для $\overline{S}_n$ справджуються ті самі міркування про довірчу ймовірність, що й для $S_n$, тому довірчий інтервал можна подати також у вигляді $\langle x\rangle - \overline{S}_n \leq X \leq \langle x\rangle + \overline{S}_n$. Цей діапазон називають *довірчим інтервалом*, а ймовірність потрапляння в нього вимірюваних значень має назву *довірча ймовірність*, або надійність, і позначається $P$.

Усі ці висновки правильні тільки при дуже великій кількості вимірювань, на практиці ж ця кількість рідко перевищує 10, частіше всього це 3—5 вимірювань. Довірча ймовірність за такої кількості вимірювань буде дуже невеликою, тому її потрібно штучно збільшувати, розширюючи довірчий інтервал.

5. Зв’язок між кількістю вимірювань, довірчою ймовірністю і шириною довірчого інтервалу встановив у 1908 році англійський математик Госет (псевдонімом Стьюдент). А коефіцієнтом Стьюдента назвали коефіцієнт $t_C$, на який потрібно помножити середню квадратичну похибку середнього арифметичного, щоб дістати величину довірчого інтервалу при бажаній довірчій імовірності. Коефіцієнт Стьюдента $t_C$ залежить від кількості вимірювань $n$ та довірчої ймовірності $P$, його знаходять у табл. 1.1.

*Таблиця 1.1*

| Кількість вимірювань $n$ | Довірча ймовірність $P$ | | |
|---|---|---|---|
| | 0,90 | 0,95 | 0,99 |
| | Значення коефіцієнта Стьюдента $t_c$ | | |
| 3 | 2,92 | 4,30 | 9,92 |
| 4 | 2,35 | 3,18 | 5,84 |
| 5 | 2,13 | 2,78 | 4,60 |
| 6 | 2,02 | 2,57 | 4,03 |
| 7 | 1,94 | 2,45 | 3,71 |
| 8 | 1,89 | 2,36 | 3,50 |
| 9 | 1,86 | 2,31 | 3,36 |
| 10 | 1,83 | 2,26 | 3,25 |

Результат серії вимірювань записують у вигляді

$$x = \langle x \rangle \pm t_C \overline{S}_n .$$

## Промахи

Про те, що є промахи, дізнаються здебільшого наприкінці досліджень, коли дістануть явно неправильні результати. Таким чином, можемо визначити *промах* як похибку, що суттєво перевищує очікувану за даних умов. Джерелом такої похибки може бути неуважність або помилка експериментатора, а також несправність засобу вимірювання.

Якщо ми дійшли висновку, що результати вимірювань містять промахи, вони відкидаються. Потім встановлюють причину, виправляють несправності і повторюють вимірювання заново.

## Загальна похибка прямих вимірювань

При вимірюваннях одночасно можуть виникати і систематичні, і випадкові похибки. Очевидно, що вони разом будуть визначати ширину довірчого інтервалу. Будемо розглядати інструментальну похибку $\Delta x_{\text{ін}}$ як таку, що виникає незалежно від випадкової похибки $\Delta x_{\text{вип}}$. За правилом додавання похибок загальна абсолютна похибка

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{вип}}^2 + \Delta x_{\text{ін}}^2} .$$

## Алгоритм обробки результатів прямих вимірювань

1. Як найближче до істинного значення величини потрібно взяти середнє арифметичне значення всіх вимірювань.

2. Підрахувати випадкові відхилення від середнього арифметичного як різницю між результатами кожного вимірювання і $\langle x \rangle$.

3. Знайти середню квадратичну похибку середнього арифметичного.

4. Знайти за таблицею для вибраного значення довірчої ймовірності ($P = 0{,}95$) і проведеної кількості вимірювань $n$ коефіцієнт Стьюдента $t_\text{С}$.

5. Помножити знайдене значення $t_\text{С}$ на величину середньої квадратичної похибки середнього арифметичного, щоб знайти випадкову похибку середнього значення $\Delta x_\text{вип}$.

6. Знайти загальну абсолютну похибку, враховуючи інструментальну похибку приладу $\Delta x_\text{ін}$.

7. Підрахувати відносну похибку.

8. Кінцевий результат вимірювань записують у вигляді

$$x = \langle x \rangle \pm t_\text{С} \overline{S}_n \ \text{(SI)}.$$

Для зручності запису чисел слід користуватися десятковими кратними і дольними одиницями, утвореними від одиниць SI, або десятковими множниками. Наприклад, замість 0,00394 м можна записати 3,94 мм або $3{,}94 \cdot 10^{-3}$ м. Кінцевий же результат подавати потрібно в Інтернаціональній системі SI.

## Похибки непрямих вимірювань

У багатьох випадках потрібну величину неможливо виміряти безпосередньо приладом, тоді потрібно вимірювати інші величини, математична залежність від яких шуканої величини відома.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда легко підрахувати, якщо відомі довжини його ребер $a$, $b$, $c$, за формулою $V = a \cdot b \cdot c$.

Але величини $a$, $b$, $c$ виміряні з деякими похибками $\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c$, від яких і залежатиме похибка об'єму паралелепіпеда $\Delta V$. Яким же чином підрахувати похибку непрямого вимірювання, якщо похибки прямих вимірювань відомі?

Загальні правила підрахунку похибок непрямих вимірювань можна дістати тільки за допомогою математичної теорії похибок і методів диференціального числення. Наведемо тільки остаточні формули та методику їх застосування.

Нехай шукана величина $y$ залежить від кількох безпосередньо і незалежно виміряних величин $x_1$, $x_2$, ..., $x_i$, ..., $x_n$, і залежність ця відома: $y = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$.

Досить часто розрахунок похибок результатів непрямих вимірювань зручніше починати зі знаходження відносної похибки $\varepsilon_y$:

$$\varepsilon_y = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}\ .$$

У цю формулу замість частинних похідних від функції $f\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ входять частинні похідні від логарифма цієї функції. Особливо зручно застосовувати таку формулу для функцій виду $y = A\, x_1^{\,l} \cdot x_2^{\,m} \cdot \ldots \cdot x_n^{\,p}$, де $A$, $l$, $m$, $p$ — сталі величини, які можуть бути цілими або дробовими, додатними або від'ємними. Знайдемо відносну похибку такої функції, для чого спочатку логарифмуємо цей вираз:

$$\ln y = \ln A + l \ln x_1 + m \ln x_2 + \ldots + p \ln x_n\ .$$

Потім знайдемо частинні похідні від логарифма функції за змінними $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x_1} = \frac{l}{x_1}; \frac{\partial \ln y}{\partial x_2} = \frac{m}{x_2}; \ldots; \frac{\partial \ln y}{\partial x_n} = \frac{p}{x_n}\ .$$

Підставивши ці значення в загальний вираз для відносної похибки $\varepsilon_y$, дістанемо формулу

$$\varepsilon_y = \sqrt{\left(\frac{l\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{m\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p\Delta x_n}{x_n}\right)^2}\ .$$

Відношення абсолютної похибки величини $\Delta x_i$ до її значення $x_i$ є відносною похибкою. Після такої заміни вираз набирає досить простого вигляду:

$$\varepsilon_y = \sqrt{(l\varepsilon_{x_1})^2 + (m\varepsilon_{x_2})^2 + \ldots + (p\varepsilon_{x_n})^2}\ ,$$

де $\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, ..., \varepsilon_{x_n}$ — відносні похибки результатів прямих вимірювань.

Отже, чим більший показник степеня величини у формулі, тим більше впливає похибка цієї величини на загальну похибку результату непрямого вимірювання, при цьому знак («плюс» чи «мінус») показника степеня не має значення, оскільки всі величини у формулі беруться у квадраті.

Залежність, в якій відсутні операції додавання і віднімання, зустрічається досить часто, наприклад, густина твердого циліндричного тіла розраховується за формулою

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{\pi D^2}{4}h} = \frac{4m}{\pi D^2 h} = \frac{4}{\pi} m^{+1} \cdot D^{-2} \cdot h^{-1}\ ,$$

де $m$ — маса циліндра; $V$ — його об'єм, а $D$ і $h$ — діаметр і висота.

Застосувавши загальну формулу для даного випадку, дістанемо вираз для знаходження відносної похибки густини:

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{(\varepsilon_m)^2 + (2\varepsilon_D)^2 + (\varepsilon_h)^2}\ .$$

Тепер легко знайти й абсолютну похибку $\Delta\rho = \rho \cdot \varepsilon_\rho$.

Насамкінець наведемо послідовність дій для відшукання похибки непрямих вимірювань.

### *1.4.5. Лабораторна робота*
### Визначення густини тіл правильної геометричної форми. розрахунок похибок вимірювань

*Мета роботи*: вивчення методів і набуття навичок обробки результатів вимірювань та обчислення похибок.

*Завдання*. Обчислити густину речовини, з якої зроблено тіло, та абсолютну і відносну похибки вимірювання густини.

*Прилади*: штангенциркуль, мікрометр, терези.

**Теоретичні відомості**

Густина показує масу речовини, що міститься в одиниці об'єму тіла. Якщо тіло однорідне, його густина обчислюється за формулою

$$\rho = \frac{m}{V},$$

де $\rho$ — густина; $m$ — маса тіла; $V$ — об'єм тіла.

Одиницею густини в СІ є кілограм, поділений на кубічний метр. Наприклад, густина алюмінію дорівнює 2700 кг/м$^3$. Значення густин інших речовин наведено у таблиці.

Якщо тіло має форму циліндра, його об'єм обчислюється за формулою

$$V = Sh = \frac{\pi d^2}{4} h,$$

тому густину речовини, з якої виготовлено циліндр, можна обчислити за формулою

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h},$$

де $S$ — площа основи циліндра; $h$ , $d$ — висота та діаметр основи циліндра.

**Порядок виконання роботи**

1. Виміряти штангенциркулем або мікрометром (залежно від розмірів циліндра) його діаметр. Діаметр потрібно виміряти п'ять разів для того, щоб обчислити похибку вимірювання.

Оскільки ідеальних циліндрів не існує, для того щоб знайти середній діаметр, вимірювання потрібно виконувати в різних частинах циліндра. Результати вимірювань занести в табл. 1.2.

2. Аналогічно до п. 1 виміряти висоту циліндра. Результати вимірювань занести в табл. 1.2

3. Виміряти значення маси. Результати занести в табл. 1.2

*Таблиця 1.2*

| Вимірювана величина | Виміряні значення величини | | | | | Середнє значення |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Діаметр $d$, $10^{-3}$ м | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | $\langle d\rangle$ |
| | | | | | | |
| Висота $h$, $10^{-3}$ м | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_5$ | $\langle h\rangle$ |
| | | | | | | |
| Маса $m$, $10^{-3}$ кг | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $\langle m\rangle$ |
| | | | | | | |

За відсутності приладів викладач можете запропонувати один з варіантів результатів попередньо проведених вимірювань з табл. 1.3.

*Таблиця 1.3*

| Варіант | Номер досліду | Діаметр d, мм | Висота h, мм | Маса m, г | Варіант | Номер досліду | Діаметр d, мм | Висота h, мм | Маса m, г |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 40,12 | 20,15 | 26,1 | 6 | 1 | 20,04 | 29,55 | 70,6 |
| | 2 | 40,03 | 20,35 | 25,9 | | 2 | 20,08 | 29,35 | 70,4 |
| | 3 | 39,98 | 19,95 | 26,4 | | 3 | 20,10 | 29,90 | 70,2 |
| | 4 | 40,09 | 20,50 | 26,5 | | 4 | 20,12 | 29,15 | 70,9 |
| | 5 | 40,04 | 19,85 | 25,7 | | 5 | 20,05 | 29,60 | 70,3 |
| 2 | 1 | 40,17 | 40,10 | 127,1 | 7 | 1 | 40,11 | 25,50 | 250,5 |
| | 2 | 40,09 | 40,70 | 125,9 | | 2 | 40,17 | 25,35 | 250,3 |
| | 3 | 39,98 | 39,85 | 125,4 | | 3 | 39,18 | 25,95 | 250,9 |
| | 4 | 40,06 | 40,15 | 125,5 | | 4 | 40,14 | 25,10 | 250,1 |
| | 5 | 40,04 | 39,90 | 126,7 | | 5 | 39,19 | 25,85 | 250,8 |
| 3 | 1 | 20,04 | 50,60 | 137,1 | 8 | 1 | 20,31 | 26,10 | 24,3 |
| | 2 | 20,08 | 50,45 | 135,9 | | 2 | 20,33 | 25,90 | 24,8 |
| | 3 | 20,10 | 50,20 | 135,4 | | 3 | 19,39 | 26,45 | 24,1 |
| | 4 | 20,12 | 50,90 | 135,5 | | 4 | 20,35 | 26,55 | 24,9 |
| | 5 | 20,05 | 50,35 | 136,7 | | 5 | 19,38 | 25,70 | 24,5 |
| 4 | 1 | 60,04 | 24,30 | 23,5 | 9 | 1 | 43,12 | 38,50 | 324,3 |
| | 2 | 60,08 | 24,80 | 23,3 | | 2 | 43,03 | 38,35 | 324,8 |
| | 3 | 60,11 | 24,15 | 23,9 | | 3 | 42,98 | 38,85 | 324,1 |
| | 4 | 60,02 | 24,95 | 23,1 | | 4 | 43,09 | 38,20 | 324,9 |
| | 5 | 60,05 | 24,50 | 23,8 | | 5 | 43,04 | 38,95 | 324,5 |
| 5 | 1 | 20,11 | 10,60 | 32,3 | 10 | 1 | 20,04 | 59,50 | 15,2 |
| | 2 | 20,17 | 10,45 | 32,8 | | 2 | 20,08 | 59,30 | 15,4 |
| | 3 | 19,18 | 10,25 | 32,1 | | 3 | 20,11 | 59,95 | 15,7 |
| | 4 | 20,14 | 10,90 | 32,9 | | 4 | 20,02 | 59,15 | 15,1 |
| | 5 | 19,19 | 10,35 | 32,5 | | 5 | 20,05 | 59,60 | 15,9 |

## Обробка результатів вимірювань

1. Обчислити середньоарифметичні значення діаметра $\langle d\rangle$, висоти $\langle h\rangle$ і маси $\langle m\rangle$ циліндра за відповідними формулами:

$$\langle d\rangle = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5};\quad \langle h\rangle = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5}{5};$$

$$\langle m\rangle = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{5}.$$

Результати обчислень занести в табл.1.2.

2. Обчислити відхилення результатів вимірювань діаметра, висоти і маси від середнього арифметичного значення:

— діаметра $\Delta d_1 = d_1 - \langle d\rangle$; $\Delta d_2 = d_2 - \langle d\rangle$; $\Delta d_3 = d_3 - \langle d\rangle$;
$\Delta d_4 = d_4 - \langle d\rangle$; $\Delta d_5 = d_5 - \langle d\rangle$;

— висоти $\Delta h_1 = h_1 - \langle h\rangle$; $\Delta h_2 = h_2 - \langle h\rangle$; $\Delta h_3 = h_3 - \langle h\rangle$;
$\Delta h_4 = h_4 - \langle h\rangle$; $\Delta h_5 = h_5 - \langle h\rangle$;

— маси $\Delta m_1 = m_1 - \langle m\rangle$; $\Delta m_2 = m_2 - \langle m\rangle$; $\Delta m_3 = m_3 - \langle m\rangle$;
$\Delta m_4 = m_4 - \langle m\rangle$; $\Delta m_5 = m_5 - \langle m\rangle$.

Результати обчислень занести в табл. 1.4.

3. Піднести до квадрата відхилення результатів вимірювань від середнього арифметичного:

— діаметра $\Delta d_1^2$; $\Delta d_2^2$; $\Delta d_3^2$; $\Delta d_4^2$; $\Delta d_5^2$;

— висоти $\Delta h_1^2$; $\Delta h_2^2$; $\Delta h_3^2$; $\Delta h_4^2$; $\Delta h_5^2$;

— маси $\Delta m_1^2$; $\Delta m_2^2$; $\Delta m_3^2$; $\Delta m_4^2$; $\Delta m_5^2$.

Результати обчислень занести в табл. 3.

4. Обчислити середньоквадратичне відхилення результатів вимірювань діаметра, висоти і маси від середнього арифметичного

— діаметра

$$S_{n(d)} = \sqrt{\frac{\Delta d_1^2 + \Delta d_2^2 + \Delta d_3^2 + \Delta d_4^2 + \Delta d_5^2}{n(n-1)}};$$

— висоти

$$S_{n(h)} = \sqrt{\frac{\Delta h_1^2 + \Delta h_2^2 + \Delta h_3^2 + \Delta h_4^2 + \Delta h_5^2}{n(n-1)}};$$

— маси

$$S_{n(m)} = \sqrt{\frac{\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2 + \Delta m_3^2 + \Delta m_4^2 + \Delta m_5^2}{n(n-1)}},$$

де $n$ — кількість вимірювань. Результати занести в табл. 1.4.

5. Обчислити випадкові складові похибок:

$$\Delta d_{\text{вип}} = S_{n(d)} t_{\text{C}};\qquad \Delta h_{\text{вип}} = S_{n(h)} t_{\text{C}};\qquad \Delta m_{\text{вип}} = S_{n(m)} t_{\text{C}},$$

де $t_{\text{C}}$ — коефіцієнт Стьюдента. Результати занести в табл. 1.4.

*Таблиця 1.4*

| Обробка результатів вимірювання діаметра | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Номер вимірювання | $\Delta d_i$, $10^{-3}$ м | $\Delta d_i^2$, $10^{-6}$ м$^2$ | $S_n$, $10^{-3}$ м | $\Delta d_{вип}$, $10^{-3}$ м | $\Delta d_{сист}$, $10^{-3}$ м | $\Delta d_{повн}$, $10^{-3}$ м |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| Обробка результатів вимірювання висоти | | | | | | |
| Номер вимірювання | $\Delta h_i$, $10^{-3}$ м | $\Delta h_i^2$, $10^{-6}$ м$^2$ | $S_n$, $10^{-3}$ м | $\Delta h_{вип}$, $10^{-3}$ м | $\Delta h_{сист}$, $10^{-3}$ м | $\Delta h_{повн}$, $10^{-3}$ м |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| Обробка результатів вимірювання маси | | | | | | |
| Номер вимірювання | $\Delta m_i$, $10^{-3}$ кг | $\Delta m_i^2$, $10^{-6}$ кг$^2$ | $S_n$, $10^{-3}$ кг | $\Delta m_{вип}$, $10^{-3}$ кг | $\Delta m_{сист}$, $10^{-3}$ кг | $\Delta m_{повн}$, $10^{-3}$ кг |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |

6. За систематичну похибку відрегульованого вимірювального інструменту прийняти його інструментальну похибку. Для мікрометра $\Delta d_{сист} = 0{,}01$ мм, для штангенциркуля $\Delta h_{сист} = 0{,}05$ мм, для терезів $\Delta m_{сист} = 0{,}1$ г. Записати ці похибки у табл. 1.4

7. Обчислити повні похибки діаметра, висоти та маси:

$$\Delta d = \sqrt{\Delta d_{вип}^2 + \Delta d_{сист}^2}\,;\ \Delta h = \sqrt{\Delta h_{вип}^2 + \Delta h_{сист}^2}\,;\ \Delta m = \sqrt{\Delta m_{вип}^2 + \Delta m_{сист}^2}\,.$$

Результати обчислень занести в табл. 3.

8. Обчислити середньоарифметичне значення густини тіла:

$$\langle\rho\rangle = \frac{4\langle m\rangle}{\pi\langle d\rangle^2\langle h\rangle}\,.$$

9. Обчислити відносну похибку знайденого значення густини:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\langle m\rangle}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{\langle d\rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h\rangle}\right)^2}\,.$$

10. Обчислити абсолютну похибку знайденого значення густини:

$$\Delta\rho = \langle\rho\rangle\varepsilon\,.$$

11. Записати результат вимірювання густини циліндра у формі:

$$\rho = (\langle\rho\rangle \pm \Delta\rho)\ \text{кг}/\text{м}^3,\ \varepsilon = \ldots\ \%.$$

**Висновки**

Використовуючи результат вимірювання густини, визначити з якого матеріалу виготовлено циліндр і точність вимірювань.

**Підготовка до захисту роботи**

Вивчити теоретичний матеріал за темою «Похибки вимірювань фізичних величин». Звернути особливу увагу на такі питання:

— Що таке вимірювання? Прямі і непрямі вимірювання.
— Що таке похибка? Абсолютна і відносна похибки.
— Систематична похибка. Знаходження систематичної похибки.
— Випадкова похибка. Обчислення випадкової похибки.
— Похибка непрямих вимірювань. Від чого вона залежить?
— Алгоритм обчислення похибки прямих і непрямих вимірювань.

## *1.4.6. Лабораторна робота*
## Визначення моменту інерції системи тіл, що обертаються

*Мета роботи*: вивчення методу відшукання моменту інерції тіл на маятнику Обербека.

*Завдання*. Дослідити залежність моменту інерції системи тіл від розподілу маси системи відносно осі обертання.

*Прилади*: маятник Обербека, секундомір, лінійка, штангенциркуль.

**Метод та дослідна установка**

У даній лабораторній роботі для знаходження моменту інерції використовується маятник Обербека. Його головним елементом є хрестовина, що може обертатися навколо осі О (рис. 1.16).

Хрестовина складається зі шківа *1*, спиць *2* і важків *3*, що можуть переміщуватись уздовж спиць. На шків хрестовини намотується нитка *4*, до якої прив’язаний тягарець *5*. Для знаходження висоти опускання тягарця вздовж нитки розташовано лінійку *6*.

Працює установка наступним чином. На тягарець *5* діє сила тяжіння $m\vec{g}$ (рис. 1.16), яка натягує нитку *4* із силою $\vec{T}$. Сила натягу нитки діє на шків *1* і розкручує його разом із хрестовиною.

Для обчислення моменту інерції хрестовини $I$ використовується головний закон динаміки обертального руху: $I\varepsilon = M$, його можна переписати відносно $I$:

$$I = \frac{M}{\varepsilon}.$$

У нашому випадку $M$ — це момент сили, що діє на шків *1* відносно осі обертання, а $\varepsilon$ — кутове прискорення хрестовини.

Момент сили $M$, що діє на шків, дорівнює добутку сили натягу нитки $T$ на радіус шківа $R$: $M = TR$.

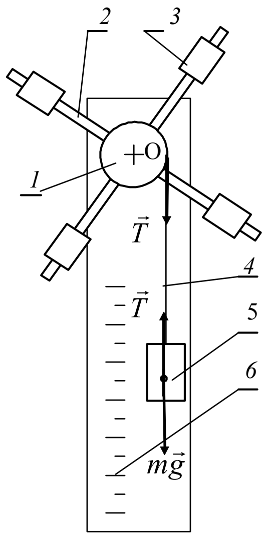


Рис. 1.16

У свою чергу, силу натягу нитки можна знайти, якщо розглянути рух тягарця *5*, що висить на нитці *4*.

Згідно з другим законом Ньютона для поступального руху можна скласти рівняння руху тягарця з масою $m$:

$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$, або у скалярній формі: $mg - T = ma \Rightarrow$

$T = mg - ma$, або $T = m(g - a)$.

Оскільки тягарець рухається зі сталим прискоренням, то його рух можна описати загальним рівнянням

$$h = h_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

У нашому випадку початкове положення тягарця і його початкова швидкість дорівнюють нулю: $h_0 = 0$, $v_0 = 0$. Тоді:

$$h = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2}.$$

Отже, силу натягу нитки можна обчислити за формулою

$$T = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right),$$

а момент сили $$M = mR\left(g - \frac{2h}{t^2}\right).$$

Кутове прискорення $\varepsilon$ можна знайти, розмірковуючи так: якщо нитку, на якій висить тягарець, вважати нерозтяжною, то всі точки нитки і тієї частини, що намотана на диск у тому числі, рухатимуться з таким самим прискоренням, що й тягарець. Таким чином, тангенціальне прискорення зовнішніх точок шківа дорівнює лінійному прискоренню тягарця *5*:

$$a_\tau = a = \frac{2h}{t^2}.$$

Відомо, що кутове прискорення $\varepsilon$ і тангенціальне $a_\tau$ пов'язані між собою так:

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{R},$$

тоді

$$\varepsilon = \frac{2h}{Rt^2}.$$

Підставивши формули для моменту сили та кутового прискорення у головний закон динаміки обертального руху, дістанемо формулу для обчислення моменту інерції хрестовини:

$$I = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{mR\left(g - \frac{2h}{t^2}\right)}{\frac{2h}{Rt^2}},$$

а після арифметичних перетворень знайдемо остаточну розрахункову формулу для обчислення моменту інерції хрестовини:

$$I = \frac{mR^2\left(gt^2 - 2h\right)}{2h}.$$

## Порядок виконання роботи

1. Виміряти штангенциркулем діаметр шківа, на який намотується нитка, та розрахувати його радіус $R$. За абсолютну

похибку вимірювань $\Delta R$ взяти інструментальну похибку штангенциркуля.

2. Записати в табл. 1 масу тягарця $m$, що висить на нитці (її значення наведено на тягарці). За абсолютну похибку $\Delta m$ узяти порядок останньої цифри в наведеному значенні маси.

3. Визначити висоту $h$ опускання тягарця. За абсолютну похибку вимірювань $\Delta h$ узяти ціну поділки лінійки *6*. Результати вимірювань *R, m, h* та їх похибки перевести в систему вимірювань СІ та занести в табл. 1.5

4. Зняти важки з хрестовини.

5. Намотати нитку *4* (див. рис. 1.16) на шків *1* таким способом, щоб тягарець *5* містився на нульовій поділці лінійки *6*.

*Таблиця 1.5*

| Діаметр шківа | | Маса тягарця | | Висота опускання тягарця | |
|---|---|---|---|---|---|
| Значення $R$, $10^{-3}$ м | Похибка $\Delta R$, $10^{-3}$ м | Значення $m$, $10^{-3}$ кг | Похибка $\Delta m$, $10^{-3}$ кг | Значення $h$, м | Похибка $\Delta h$, м |
| | | | | | |

6. Виміряти час розкручування хрестовини. Для цього відпустити хрестовину й одночасно ввімкнути секундомір. Коли тягарець пройде нижню поділку лінійки *6*, вимкнути секундомір.

7. Повторити вимірювання часу розкручування хрестовини ще чотири рази. Виміряні значення часу занести в табл. 1.6 у рядок «Без важків».

8. Надіти на спиці *2* (див. рис. 1.16) важки *3* таким чином, щоб вони були якомога ближчими до осі обертання. Виміряти значення $r_1$, тобто відстань від центра важка до осі обертання хрестовини. Виміряне значення занести в табл. 1.6.

9. Повторити п. 5—7. Виміряні значення часу занести в табл. 1.6 у рядок «Положення 1».

10. Перемістити важки вздовж спиць таким чином, щоб вони були посередині спиць. Виміряти відповідне значення $r_2$. Виміряне значення занести в табл. 1.6.

11. Повторити п. 5—7. Виміряні значення часу занести в табл. 1.6 у рядок «Положення 2».

12. Перемістити важки вздовж спиць *2* таким чином, щоб вони були наприкінці спиць. Виміряти значення $r_3$ і здобутий результат занести в табл. 1.6.

13. Повторити п. 5—7. Виміряні значення часу занести в табл. 1.6 у рядок «Положення 3».

## Обробка результатів вимірювань

1. *Обчислення моменту інерції важків*

1.1. Обчислити середньоарифметичні значення часу $\langle t\rangle$ розкручування маятника (опускання тягарця) без важків і з важками в положеннях 1, 2 і 3. Здобуті значення занести в табл. 1.6.

1.2. Згідно з робочою формулою

$$I = \frac{mR^2\left(g\langle t\rangle^2 - 2h\right)}{2h}$$

обчислити значення моменту інерції хрестовини без важків $I_0$ і моменти інерції хрестовини з важками в різних положеннях $I_1$, $I_2$, $I_3$.

Результати обчислень занести в табл. 1.6.

1.3. Обчислити значення моментів інерції важків у різних положеннях $I_{B1}$, $I_{B2}$ та $I_{B3}$ за формулами:

$$I_{B1} = I_1 - I_0;\quad I_{B2} = I_2 - I_0;\quad I_{B3} = I_3 - I_0.$$

Результати обчислень занести в табл. 1.6.

*Таблиця 1.6*

| Положення важків на хрестовині | Номер досліду | Час розкручування хрестовини | | Момент інерції | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | в окремому досліді $t_i$, с | Середньо арифметичний $\langle t\rangle$, с | маятника, кг · м$^2$ | важків, кг · м$^2$ |
| Без важків | 1 | | | $I_0$ = | Не заповнюється |
| | 2 | | | | |
| | 3 | | | | |
| | 4 | | | | |
| | 5 | | | | |
| Положення 1 $r_1$ = ... м | 1 | | | $I_1$ = | $I_{B1}$ = |
| | 2 | | | | |
| | 3 | | | | |
| | 4 | | | | |
| | 5 | | | | |
| Положення 2 $r_2$ = ... м | 1 | | | $I_2$ = | $I_{B2}$ = |
| | 2 | | | | |
| | 3 | | | | |
| | 4 | | | | |
| | 5 | | | | |
| Положення 3 $r_3$ = ... м | 1 | | | $I_3$ = | $I_{B3}$ = |
| | 2 | | | | |
| | 3 | | | | |
| | 4 | | | | |
| | 5 | | | | |

2. *Обчислення похибки вимірювання моменту інерції важків*

2.1. Обчислити абсолютну похибку вимірювань часу за формулою

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_{\text{вип}}^2 + \Delta t_{\text{сист}}^2},$$

де $\Delta t_{\text{сист}}$ — систематична похибка вимірювань; вона береться такою, що дорівнює інструментальній похибці секундоміра, яким вимірювався час; $\Delta t_{\text{вип}}$ — випадкова похибка вимірювань; вона обчислюється за відомою формулою

$$\Delta t_{\text{вип}} = t_{\text{C}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta t_i\right)^2}{n\left(n-1\right)}},$$

де $\Delta t_i = t_i - \langle t \rangle$ — різниця між результатом окремого вимірювання та середньоарифметичним значенням часу; $t_{\text{C}}$ — коефіцієнт Стьюдента; $n$ — кількість вимірювань.

2.2. Обчислити відносну похибку вимірювань моменту інерції. У формулі

$$I = \frac{mR^2(gt^2 - 2h)}{2h},$$

є чотири величини, що вимірюються безпосередньо, а саме: $m$, $R$, $t$, $h$. Вони частково подаються у вигляді показникових функцій, частково — у вигляді алгебраїчної суми.

У такому випадку краще починати з розрахунку відносної похибки моменту інерції. Спочатку логарифмуємо формулу для моменту інерції:

$$\ln I = \ln m + 2\ln R + \ln(gt^2 - 2h) - \ln 2 - \ln h.$$

Потім знаходимо частинні похідні від моменту інерції за масою, радіусом, висотою і часом:

$$\frac{\partial \ln I}{\partial m} = \frac{1}{m}; \quad \frac{\partial \ln I}{\partial R} = \frac{2}{R};$$

$$\frac{\partial \ln I}{\partial h} = \frac{-2}{gt^2 - 2h} - \frac{1}{h} = \frac{-gt^2}{(gt^2 - 2h)h};$$

$$\frac{\partial \ln I}{\partial t} = \frac{2gt}{gt^2 - 2h}.$$

Підставивши вирази для похідних у загальну формулу

$$\varepsilon_y = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2},$$

дістанемо вираз для відносної похибки моменту інерції

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{gt^2 \Delta h}{(gt^2 - 2h)h}\right)^2 + \left(\frac{2gt\Delta t}{gt^2 - 2h}\right)^2},$$

де $\Delta m$, $\Delta R$, $\Delta t$, $\Delta h$ — абсолютні похибки прямих вимірювань. Після цього можна визначити абсолютну похибку моменту інерції $\Delta I = I \cdot \varepsilon_I$ і записати результат непрямого вимірювання моменту інерції в SI:

$$I = (I \pm \Delta I)\ \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

3. *Побудова графіка залежності моменту інерції важків від їх відстані до осі обертання* $I = f(r^2)$

3.1. На підставі табл. 1 і 2 заповнити табл. 1.7.

3.2. На міліметровому папері побудувати осі, вказані на рис. 1.17, і нанести на них відповідний масштаб. Побудувати графік залежності моменту інерції важків від їх відстані до осі обертання $I = f(r^2)$.

*Таблиця 1.7*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Відстань від центра важка до осі обертання $r$, м | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
| | | | |
| Квадрат відстані від центра важка до осі обертання $r^2$, $10^{-2}$ м$^2$ | $r_1^2$ | $r_2^2$ | $r_3^2$ |
| | | | |
| Момент інерції важків у різних положеннях $I_В$, $10^{-3}$ кг·м$^2$ | $I_{В1}$ | $I_{В2}$ | $I_{В3}$ |
| | | | |

## Підготовка до захисту роботи

Звернути особливу увагу на такі питання:

— Якими кінематичними і динамічними величинами описується обертальний рух твердого тіла?

— Що таке момент сили і момент імпульсу відносно нерухомої точки та нерухомої осі? Від чого залежать ці величини і за яким правилом визначається їх напрям?

— Що таке момент інерції тіла? Від чого він залежить?

— Основний закону динаміки обертального руху.

— Виведення розрахункової формули для обчислення моменту інерції маятника Обербека.

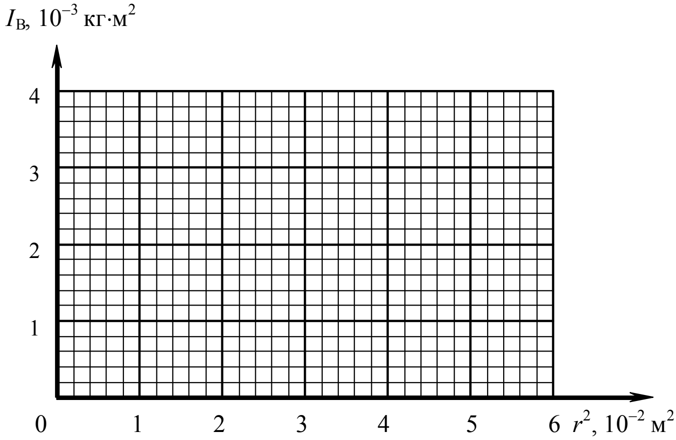


Рис. 1.17

## *1.5. НАВЧАЛЬНИЙ ЕЛЕМЕНТ ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ*

### *1.5.1. Порядок виконання ІДЗ*

Індивідуальне домашнє завдання (ІДЗ) виконується в окремому зошиті. Варіанти ІДЗ відповідно до номера студента у списку навчальної групи наведено в табл. 1.7.

Вимоги до оформлення ІДЗ: вказати номер задачі та навести її повну умову; розв'язування в загальному вигляді супроводжувати поясненнями, вказуючи на закони, які використовуються; зробити перевірку одиниць вимірювання фізичних величин; обчислення проводити наближено згідно з правилами округлювання.

Задачі підвищеної складності позначені в табл. 1.7 значком (*). Такі задачі рекомендовані студентам, які претендують на найвищі оцінки.

*Таблиця 1.7*

| Номер варіанта | Номери задач | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 1.29 | 2.1 | 2.35 | 3.1 |
| 2 | 1.2 | 1.35 | 2.2 | 2.34 | 3.2 |
| 3 | 1.3 | 1.34 | 2.7 | 2.33 | 3.3 |
| 4 | 1.4 | 1.33 | 2.4 | 2.32 | 3.9 |
| 5 | 1.5 | 1.32 | 2.5 | 2.30 | 3.5 |
| 6 | 1.6 | 1.31 | 2.6 | 2.29 | 3.6 |
| 7 | 1.7 | 1.30 | 2.7 | 2.28 | 3.7 |
| 8 | 1.8 | 1.29 | 2.8 | 3.28 | 3.8 |
| 9 | 1.9 | 1.28 | 2.9 | 3.29 | 3.9 |
| 10 | 1.10 | 1.26 | 2.10 | 3.20 | 3.10 |
| 11 | 1.11 | 1.27 | 2.11 | 3.31 | 3.11 |
| 12 | 1.12 | 1.24 | 2.12 | 3.32 | 3.7 |
| 13 | 1.13 | 1.3 | 2.13 | 3.33 | 3.13 |
| 14 | 1.14 | 2.1 | 2.14 | 3.34 | 3.14 |
| 15 | 1.5 | 2.2 | 2.15 | 3.35 | 3.15 |
| 16 | 1.16 | 2.7 | 2.16 | 3.33 | 3.16 |
| 17 | 1.17 | 2.4 | 2.17 | 3.35 | 3.17 |
| 18 | 1.1 | 2.5 | 2.18 | 2.26 | 3.18 |
| 19 | 1.19 | 2.6 | 2.19 | 2.27 | 3.19 |
| 20 | 1.20 | 2.7 | 2.20 | 2.3 | 3.20 |
| 21 | 1.21 | 2.8 | 2.21 | 2.5 | 3.21 |
| 22 | 1.22 | 2.9 | 2.22 | 3.26 | 3.22 |
| 23 | 1.23 | 3.12* | 2.23 | 3.27 | 3.23 |
| 24 | 1.18* | 3.4* | 2.24 | 2.25 | 3.24 |
| 25 | 1.25* | 1.15* | 2. 3* | 2.31* | 3.25 |

### *1.5.2. Задачі для індивідуального домашнього завдання*

*При розрахунках використовувати* $g = 9{,}8$ ì/с$^{2}$. *Опір повітря не враховувати, якщо інші вказівки відсутні.*

**1-1.** Першу половину шляху автомобіль рухався зі швидкістю 72 км/год, а другу половину шляху — зі швидкістю 36 км/год. Визначити середню швидкість руху автомобіля.

**1-2.** Першу половину часу свого руху автомобіль рухався зі швидкістю 72 км/год, а другу половину часу — зі швидкістю 36 км/год. Визначити середню швидкість руху автомобіля.

**1-3.** Одну чверть шляху автомобіль рухався зі швидкістю 60 км/год, а останній шлях — зі швидкістю 36 км/год. Визначити середню швидкість автомобіля.

**1-4.** Три чверті свого шляху автомобіль рухався зі швидкістю 60 км/год, а останню чверть він рухався зі швидкістю 80 км/год. Визначити середню швидкість автомобіля.

**1-5.** Одну третину шляху автомобіль рухався зі швидкістю 80 км/год, а останній шлях — зі швидкістю 40 км/год. Визначити середню швидкість автомобіля.

**1-6.** Першу чверть шляху потяг пройшов зі швидкістю 60 км/год. Середня швидкість на всьому шляху становила 40 км/год. Визначити, з якою швидкістю потяг пройшов решту шляху.

**1-7.** Тіло рухалось 15 с зі швидкістю 18 км/год, 10 с зі швидкістю 28,8 км/год і 6 с зі швидкістю 72 км/год. Визначити середню швидкість тіла.

**1-8.** Першу третину шляху автомобіль проїхав зі швидкістю 28,8 км/год, а останній шлях зі швидкістю 72 км/год. Визначити середню швидкість автомобіля на всьому шляху.

**1-9.** Першу третину шляху автомобіль проїхав зі швидкістю 18 км/год, а останній шлях зі швидкістю 28,8 км/год. Визначити середню швидкість автомобіля на всьому шляху.

**1-10.** Першу третину часу автомобіль рухався зі швидкістю 10 км/год, а останній час зі швидкістю 20 км/год. Визначити середню швидкість автомобіля на всьому шляху.

**1-11.** Яка допустима максимальна швидкість приземлення парашутиста, якщо людина здатна безпечно стрибати з висоти до 2 м?

**1-12.** З якої висоти впало тіло, якщо останні 10 м свого шляху воно пролетіло за 1 с?

**1-13.** Камінь вільно падає з висоти 1200 м. Який шлях пролетів камінь за останню секунду свого падіння?

**1-14.** З якої висоти впало тіло, якщо останні 25 м свого шляху воно подолало за 2 с?

**1-15.** З одного й того самого місця почали рухатись рівноприскорено в одному напрямі два тіла, причому друге тіло почало свій рух через 2 с після першого. Перше тіло рухалось із початковою швидкістю 1 м/с і прискоренням 2 м/с$^2$, друге — з початковою швидкістю 10 м/с і прискоренням 1 м/с$^2$. Через який проміжок часу і на якій відстані від початкового положення друге тіло наздожене перше?

**1-16.** Літак летить із пункту А до пункту Б, розташованого на сході за 150 км, а потім у зворотному напрямі. Визначити загальний час польоту літака, якщо: а) вітру немає; б) вітер дме з півдня на північ; в) вітер дме з заходу на схід. Швидкість вітру 20 м/с, власна швидкість літака — 360 км/год.

**1-17.** З аеростата, розташованого на висоті 300 м, впав камінь. Через який час камінь долетить до землі, якщо: 1) аеростат піднімається зі швидкістю 5 м/с; 2) аеростат спускається зі швидкістю 5 м/с; 3) аеростат нерухомий?

**1-18.** Матеріальна точка, рухаючись зі сталим прискоренням, проходить послідовно два відрізки шляху, по 10 м кожний. Перший відрізок шляху був пройдений за $t_1 = 1{,}05$ с, а другий — за $t_2 = 2{,}2$ с. Знайти прискорення матеріальної точки, а також її швидкість $\vec{v}$ на початку першого відрізка шляху.

**1-19.** З балкона, розташованого на висоті 25 м над поверхнею землі, кинули вертикально вгору м'ячик зі швидкістю 20 м/с. Написати формулу залежності координати від часу, вибравши за початок відліку: а) точку кидання; б) поверхню землі. Визначити, через який час м'ячик упаде на землю.

**1-20.** З вежі кинули камінь у горизонтальному напрямі. Через 2 с камінь упав на землю на відстані 40 м від основи вежі. З якою швидкістю він упав на землю?

**1-21.** З балкона кинули м'яч вертикально вгору з початковою швидкістю 5 м/с. Через 2 с м'яч упав на землю. Визначити висоту балкона над землею і швидкість м'яча в момент удару об землю.

**1-22.** Залежність шляху, пройденого тілом, від часу подається рівнянням $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 0{,}14$ м/с$^2$ і $D = 0{,}01$ м/с$^3$. Через який час після початку руху тіло буде мати прискорення 1 м/с$^2$?

**1-23.** Тіло рухається згідно з рівнянням $S = 7 + 4t^2 + 2t^3$ м. Визначити швидкість і прискорення тіла в момент часу $t = 2$ с і середню швидкість за перші 2 с руху.

**1-24.** Тіло рухається згідно з рівняннями $x = 7 + 4t$, $y = 2 + 3t$. Визначити швидкість руху тіла.

**1-25.** Тіло рухається прямолінійно згідно з рівнянням $x = At + Bt^2$, де $A = 2$ м/с; $B = 0{,}5$ м/с$^2$. Визначити середню швидкість руху тіла в інтервалі часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

**1-26.** Тіло рухається по колу радіусом 4 м згідно з рівнянням $S = A + Bt + Ct^2$, де $A = 10$ м; $B = -2$ м/с; $C = 1$ м/с$^2$. Визначити тангенціальне, нормальне та повне прискорення в момент часу $t = 2$ с.

**1-27.** Матеріальна точка рухається по колу так, що залежність шляху, пройденого тілом, від часу задається рівнянням $S = A - Bt + Ct^2$, де $B = 2$ м/с і $C = 1$ м/с$^2$. Знайти лінійну швидкість точки, її тангенціальне, нормальне та повне прискорення через 3 с після початку руху, якщо через 2 с після початку руху нормальне прискорення точки становило 0,5 м/с$^2$.

**1-28.** Визначити кутове прискорення колеса, коли відомо, що через 2 с після початку рівноприскореного руху вектор повного прискорення точки, яка лежить на ободі, утворює кут $60°$ з напрямом лінійної швидкості цієї точки.

**1-29.** Матеріальна точка рухається по колу радіусом 2 см. Залежність шляху, пройденого тілом, від часу задається рівнянням $S = Ct^3$, де $C = 0{,}1$ см/с$^3$. Знайти нормальне і тангенціальне прискорення точки в той момент, коли лінійна швидкість точки 0,3 м/с.

**1-30.** Колесо радіусом 10 см обертається зі сталим кутовим прискоренням 3,14 рад/с$^2$. Знайти для точок обода колеса на кінець першої секунди після початку руху: кутову швидкість; лінійну швидкість; тангенціальне прискорення.

**1-31.** Маховик, який перебуває у стані спокою, почав обертатись рівноприскорено. Зробивши 200 обертів, він мав кутову швидкість 62,8 рад/с. Визначити кутове прискорення маховика під час його рівноприскореного обертання.

**1-32.** Місяць обертається навколо Землі з періодом 27 діб. Середній радіус орбіти Місяця — $4 \cdot 10^5$ км. Визначити лінійну швидкість руху Місяця навколо Землі та його нормальне прискорення.

**1-33.** Гвинт літака виконує 1500 об/хв, при гальмуванні він став обертатись рівносповільнено і зупинився через 30 с. Визначити кутове прискорення і кількість обертів, які зробить гвинт з початку гальмування до остаточної його зупинки.

**1-34.** Колесо обертається з кутовим прискоренням 0,5 рад/с$^2$. Визначити повне прискорення точки, розміщеної на відстані 40 см від осі, через 2 с після початку обертання.

**1-35.** Знайти кутові швидкості: а) добового обертання Землі; б) годинникової стрілки годинника; в) хвилинної стрілки годинника.

**2-1.** Для відривання від поверхні землі літак розганяється зі стану спокою до швидкості 200 км/год. Сила тяги двигунів 5000 Н, сила опору повітря і сила тертя разом становлять 1500 Н. Маса літака 6000 кг. Визначити довжину і час руху літака по землі.

**2-2.** Визначити швидкість ракети після повного згоряння палива, якщо продукти згоряння вилітають із ракети зі сталою швидкістю 150 м/с. Маса ракети з паливом 30 кг, маса палива 25 кг. Вважати, що зовнішні сили на ракету не діють.

**2-3.** Гармата масою 7 т ковзає без тертя по похилій площині з кутом нахилу до горизонту 45°. Після того як вона пройшла шлях 1 м, з неї здійснили постріл у горизонтальному напрямі. Яка швидкість снаряда, якщо гармата після пострілу зупинилася? Маса снаряда 50 кг.

**2-4.** Снаряд масою 8 кг вилітає з дула гармати в горизонтальному напрямі зі швидкістю 500 м/с. Маса порохових газів, що вилетіли за снарядом, дорівнює 300 г, а їхня швидкість у 1,2 рази більша за швидкість самого снаряда. Визначити максимальну швидкість відкочування гармати, якщо її маса 3 т.

**2-5.** Платформа з гарматою рухається зі швидкістю 5 м/с. З гармати вилітає снаряд у напрямі руху платформи. Визначити швидкість платформи після пострілу. Маса платформи з гарматою 16 т, маса снаряда 20 кг, швидкість снаряда 1000 м/с.

**2-6.** Платформа з гарматою загальною масою 10 т рухається зі швидкістю 10 м/с. Із гармати вилітає снаряд масою 50 кг у бік, протилежний руху платформи, зі швидкістю 680 м/с відносно поверхні Землі. Визначити швидкість платформи після пострілу.

**2-7.** На платформі стоїть нерухомо закріплена гармата масою 8 т. Із гармати здійснюють постріл із горизонтальною швидкістю снаряда 800 м/с. З якою швидкістю почне рухатися платформа, якщо її маса 12 т, а маса снаряда 50 кг? Визначити час руху платформи, якщо коефіцієнт тертя коліс платформи з коліями — 0,01.

**2-8.** Молекула масою $4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг летить зі швидкістю 600 м/с, стикається нормально зі стінкою посудини і пружно відскакує від неї без втрати швидкості. Визначити імпульс сили, отриманий стінкою при ударі.

**2-9.** Потяг масою 500 т після припинення дії сили тяги внаслідок сили тертя 98 кН зупиняється за 1 хв. Яка була швидкість потяга?

**2-10.** Вагон масою 20 т рухається зі швидкістю 54 км/год. Під дією сили гальмування 6000 Н він зупиняється. Через який час вагон зупиниться? Яку відстань вагон пройде до зупинки?

**2-11.** Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно згідно з рівнянням $x = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де $C = 5$ м/с$^2$; $D = 1$ м/с$^3$. Визначити силу, яка діє на тіло наприкінці першої секунди руху.

**2-12.** Молекула масою $5 \cdot 10^{-26}$ кг, яка летить зі швидкістю 600 м/с, пружно стикається зі стінкою під кутом 60° до нормалі і відбивається від неї без втрати швидкості. Визначити імпульс сили, отриманий стінкою при ударі.

**2-13.** Два тягарці з масами 1,9 і 0,9 кг закріплені на кінцях нитки, перекинутої через нерухомий блок. З яким прискоренням будуть переміщатися тягарці під дією сили тяжіння? Визначити натяг нитки та силу тиску на вісь блока. Тертя і масу блока не враховувати.

**2-14.** Тіло масою 2 кг, що рухається, стикається з нерухомим тілом масою 3 кг. Вважати удар пружним і центральним. Визначити, яку частину своєї початкової кінетичної енергії перше тіло передає другому при ударі.

**2-15.** Два тіла з масами 2 і 4 кг рухаються зі швидкостями: перше тіло — 5 м/с, друге — 7 м/с. Визначити швидкість тіл після прямого непружного удару, якщо тіла рухаються назустріч одне одному.

**2-16.** Тіло масою 2 кг рухається під дією сили згідно з рівнянням $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 1$ м/с$^2$; $D = -0{,}2$ м/с$^3$. Визначити модуль цієї сили в моменти часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с. В який момент часу сила дорівнює нулю?

**2-17.** Два бруски масами 1 і 4 кг, з'єднані ниткою, лежать на столі. З яким прискоренням будуть рухатися бруски, якщо до одного з них прикласти силу 10 Н, напрямлену горизонтально? Визначити силу натягу нитки, яка з'єднує бруски, якщо силу 10 Н прикласти до першого бруска. До другого бруска? Тертям знехтувати.

**2-18.** З вежі висотою 25 м горизонтально було кинуто камінь зі швидкістю 15 м/с. Знайти кінетичну і потенціальну енергію каменя через одну секунду після початку руху. Маса каменя 0,2 кг. Опором повітря знехтувати.

**2-19.** Парашутист летів 45 м як вільно падаюче тіло, потім розкрив парашут і за 4 с зменшив швидкість у п'ять разів. Визначити натяг тросів одразу після розкриття парашута. Вага парашутиста 538 Н.

**2-20.** Кулька масою 0,3 кг, що рухається зі швидкістю 10 м/с, пружно стикається з нерухомою кулею масою 0,7 кг. Яка буде швидкість нерухомої кулі після зіткнення?

**2-21.** На автомобіль масою 1 т під час руху діє сила тертя, яка дорівнює 0,1 сили тяжіння. Яка має бути сила тяги двигуна, щоб автомобіль рухався: а) рівномірно; б) з прискоренням 2 м/с$^2$?

**2-22.** Два тягарці масами 200 та 210 г закріплені на кінцях нитки, перекинутої через блок. Визначити натяг нитки та силу тиску на вісь блока під час руху тягарців. Тертя і масу блока не враховувати.

**2-23.** До кронштейна, закріпленого на візку, на нитці підвішена куля. Який кут відхилення нитки, якщо прискорення візка 0,5 м/с$^2$?

**2-24.** Кулька масою 500 г, рухаючись зі швидкістю 2 м/с, зіштовхнулася зі стінкою. Під яким кутом до поверхні стінки відбулося зіткнення, якщо стінка отримала імпульс 1 кг · м/с? Зіткнення вважати абсолютно пружним.

**2-25.** Дві кулі з масами 8 і 3 кг рухалися назустріч і зупинилися після непружного центрального удару. Визначити швидкість більшої кулі до удару, якщо швидкість меншої кулі була 2 м/с.

**2-26.** Автомат вистрілює 600 куль за хвилину. Маса кожної кулі 4 г, її початкова швидкість 500 м/с. Знайти середню силу віддачі автомата під час стрільби.

**2-27.** З яким прискоренням будуть переміщуватися під дією сили тяжіння тягарці, закріплені на кінцях нитки, перекинутої через блок, якщо їхні маси 100 і 105 г? Тертя і масу блока не враховувати.

**2-28.** Через невагомий блок на краю стола перекинуто нитку, що з'єднує два тіла з масами 3 і 1 кг. Перше тіло міститься на столі, тертя відсутнє. Друге тіло звисає за край стола. Знайти прискорення цих тіл та силу натягу нитки.

**2-29.** Кулька масою 200 г рухається зі швидкістю 10 м/с і стикається з нерухомою кулею масою 800 г. Удар центральний, абсолютно пружний. Знайти швидкості кульок після зіткнення.

**2-30.** Визначити жорсткість системи двох пружин при послідовному і паралельному їх з'єднанні. Жорсткість пружин $k_1$ = 2 кН/м і $k_2$ = 6 кН/м.

**2-31.** Ракета масою 1 т рухається вгору з поверхні Землі з прискоренням $a = 2g$. Гази вилітають із сопла ракети зі швидкістю 1000 м/с. Скільки палива витрачається за кожну секунду руху?

**2-32.** Під дією сили 10 Н тіло рухається прямолінійно так, що залежність пройденого тілом шляху від часу описується рівнянням $S = A - Bt + Ct^2$, де $C$ = 1 м/с$^2$. Знайти масу тіла.

**2-33.** Штучний супутник Землі обертається по коловій орбіті на висоті 3200 км над Землею. Визначити лінійну швидкість супутника.

**2-34.** Тіло кинуто вгору під кутом 60° до горизонту. Кінетична енергія тіла в початковий момент часу дорівнювала 20 Дж. Знайти кінетичну і потенціальну енергії тіла в точці максимального підйому. Опір повітря не враховувати.

**2-35.** Матеріальна точка масою 2 кг рухається згідно з рівнянням $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B$ = –2 м/с; $C$ = 1 м/с$^2$; $D$ = –0,2 м/с$^3$. Яка потужність витрачається на рух точки в моменти часу $t_1$ = 2 с, $t_2$ = 5 с?

**3-1.** Через блок перекинуто нитку, до кінців якої підвішені тягарці масами 100 і 300 г. Маса блока 200 г розподілена по його ободу. Визначити прискорення, з яким будуть рухатись тягарці без тертя, і сили натягу нитки.

**3-2.** Знайти момент інерції тонкого однорідного стрижня довжиною 60 см та масою 100 г відносно осі, що проходить на відстані 20 см від одного кінця та перпендикулярна до нього.

**3-3.** Два однорідних тонких стрижня: $AB$ довжиною $l$ = 40 см та масою $m_1$ = 900 г, $CD$ масою $m_2$ = 400 г з'єднано під прямим кутом згідно з рис. 1.18. Знайти момент інерції системи відносно осі $OO'$.

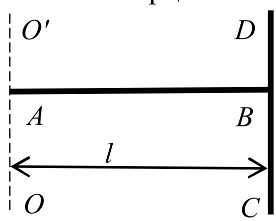


Рис 1.18

**3-4.** Діаметр диска $D$ = 20 см, маса 0,8 кг, у ньому вирізали отвір діаметром $d = D/2$, центр отвору знаходиться на відстані $D/4$ від центра диска. Знайти момент інерції диска з отвором відносно осі, що проходить через середину диска перпендикулярно до поверхні.

**3-5.** Горизонтальна кругла платформа радіусом 1 м обертається з частотою 6 об/хв. Людина масою 80 кг стоїть на краю платформи. З якою кутовою швидкістю почне обертатися платформа, якщо людина перейде до її центра? Момент інерції платформи 120 кг·м$^2$. Момент інерції людини знаходити як для матеріальної точки.

**3-6.** Людина в центрі горизонтальної круглої платформи тримає у витягнутих руках дві гирі масою 2 кг кожна. Відстань від осі обертання до гир 0,8 м. Частота обертання платформи $n_1$ = 0,5 об/с. Момент інерції людини відносно осі обертання 1,6 кг·м$^2$. Знайти частоту обертання платформи, якщо людина опустить руки і відстань від осі обертання до гир стане рівною 0,2 м. Момент інерції платформи не враховувати.

**3-7.** Маховик, який має вигляд диска масою 80 кг і радіусом 30 см, перебуває у стані спокою. Яку роботу треба виконати, щоб після розкручування маховик мав частоту обертання 10 об/с?

**3-8.** Маховик, момент інерції якого дорівнює 40 кг·м$^2$, почав обертатися рівноприскорено зі стану спокою під дією моменту сили $M$ = 20 Н·м. На розкручування маховика витрачається 10 с. Визначити кінетичну енергію, якої набув маховик.

**3-9.** Обруч і суцільний циліндр з однаковими масами 2 кг котяться без ковзання зі швидкістю 5 м/с. Яке тіло має більшу кінетичну енергію, на скільки вона більша?

**3-10.** Шків, момент інерції якого 63,6 кг·м$^2$, обертається зі сталою кутовою швидкістю 31,4 рад/с. Знайти гальмівний момент, під дією якого шків зупиниться через 20 с.

**3-11.** Маса однорідного циліндричного диска 1 кг, діаметр 40 см. Диск обертається навколо вертикальної осі з частотою 1500 об/хв. Під час гальмування з постійним прискоренням він зупинився впродовж 20 с. Визначити гальмівний момент.

**3-12.** Горизонтально розміщений стрижень обертається навколо вертикальної осі з частотою 1 об/с. Уздовж нього ковзає без тертя муфта, маса якої 100 г. Визначити горизонтальну складову сили, що діє на муфту в той момент, коли її швидкість дорівнює 50 м/с.

**3-13.** Тягар масою 10 кг прив'язано до кінця нитки, намотаної на барабан радіусом 0,5 м. Знайти момент інерції барабана, якщо тягарець опускається з прискоренням 2 м/с$^2$.

**3-14.** Однорідний циліндр котиться без ковзання по поверхні, нахиленій під кутом 30$^o$ до горизонту. Визначити швидкість циліндра, коли він пройде шлях довжиною 2 м. Через який час циліндр пройде цей шлях? Тертям знехтувати.

**3-15.** На блок у вигляді суцільного диска масою 100 г намотано нитку, до кінця якої підвішений тягарець масою 80 г. З яким прискоренням буде падати тягарець? Тертя не враховувати.

**3-16.** Стрижень довжиною 1 м і масою 2 кг може обертатися навколо осі, що проходить через його центр. У кінець стрижня потрапляє куля вагою 0,1 Н, її швидкість 200 м/с перпендикулярна до стрижня й осі обертання. Визначити кутову швидкість стрижня, якщо куля застряє в ньому.

**3-17.** Маховик виконує 5 обертів за секунду. Під дією сталого гальмівного моменту, що дорівнює 9800 Н·м, він зупинився через 20 с. Визначити момент інерції маховика.

**3-18.** Маса однорідного циліндричного диска 1 кг, діаметр його 40 см. Диск обертається з частотою 2500 об/хв. При гальмуванні він зупинився через 20 с. Визначити гальмівний момент.

**3-19.** На блок у вигляді диска намотано нитку, до кінця якої підвішений тягарець масою 1 кг. На яку відстань має опуститися тягарець, щоб частота обертання блоку дорівнювала $n$ = 60 об/хв? Момент інерції диска $I$ = 0,42 кг·м$^2$, радіус диска 10 см.

**3-20.** Маховик, маса якого 4 кг розподілена на його ободі радіусом 40 см, обертається з частотою 720 об/хв навколо осі, що проходить через його центр. Через 30 с під дією гальмівного моменту маховик зупинився. Знайти гальмівний момент і кількість обертів, які зробить маховик до повної зупинки.

**3-21.** Диск має радіус 0,1 м і масу 0,8 кг. Визначити його момент інерції відносно осі, що проходить через середину одного з радіусів диска перпендикулярно до його площини.

**3-22.** Диск масою 9 кг може обертатися навколо горизонтальної осі без тертя. На нього намотано нитку, до кінця якої прив'язаний тягарець масою 2 кг. Знайти прискорення тягарця при опусканні.

**3-23.** Маховик, момент інерції якого дорівнює 63,6 кг·м$^2$, обертається зі сталою кутовою швидкістю 3,14 рад/с. Визначити гальмівний момент, під дією якого маховик зупиняється через 20 с.

**3-24.** Маховик обертається навколо нерухомої осі згідно з рівнянням $\varphi = Bt + Ct^2$, де $C = 2$ рад/с$^2$. Момент інерції маховика 50 кг·м$^2$. Визначити обертальний момент.

**3-25.** Циліндр масою 20 кг може обертатися без тертя навколо горизонтальної осі. На нього намотано нитку, до якої підвішений тягарець вагою 35 Н. З яким прискоренням опускатиметься тягарець?

**3-26.** Дві маленькі кульки масами 50 г кожна з'єднані тонким однорідним стрижнем довжиною 20 см та масою 60 г. Визначити момент інерції системи відносно осі, що проходить перпендикулярно через її середину.

**3-27.** Людина, знаходячись у центрі платформи, тримає за середину штангу завдовжки 2 м та масою 18 кг у горизонтальному положенні. Платформа при цьому здійснює 30 обертів за хвилину. Людина повертає штангу у вертикальній площині на кут 60$^\circ$. Визначити кутову швидкість платформи після повороту штанги. Момент інерції людини вважати еквівалентним масі 50 кг на відстані 0,1 м від осі обертання платформи. Момент інерції платформи не враховувати.

**3-28.** Платформа у вигляді диска радіусом 1 м обертається за інерцією з частотою $n = 6$ об/хв. На краю платформи стоїть людина, маса якої 80 кг. Скільки обертів за хвилину виконуватиме платформа, якщо людина перейде до її центра? Момент інерції платформи 120 кг·м$^2$. Момент інерції людини розрахувати як для матеріальної точки.

**3-29.** Момент інерції маховика $2\cdot10^6$ г·см$^2$. Через який час частота його обертання дорівнюватиме 1800 об/хв, якщо потужність двигуна 150 Вт?

**3-30.** Диск масою 2 кг котиться без ковзання по горизонтальній поверхні зі швидкістю 2 м/с. На якій відстані можна його зупинити, приклавши дотичну силу 9,8 Н?

**3-31.** Людина масою 60 кг перебуває на нерухомій платформі масою 100 кг. Яку кількість обертів за хвилину здійснюватиме платформа, якщо людина рухатиметься по колу радіусом 5 м навколо осі обертання? Швидкість руху людини відносно платформи 4 км/год. Радіус платформи 10 м. Вважати платформу однорідним диском, людину — точковою масою.

**3-32.** Платформа у вигляді диска може обертатись навколо вертикальної осі без тертя. На краю платформи стоїть людина. На який кут повернеться платформа відносно землі, якщо людина, рухаючись уздовж краю платформи, знову потрапить на те саме місце відносно поверхні землі? Маса платформи 200 кг, маса людини 60 кг. Людину вважати точковою масою.

**3-33.** Горизонтальна платформа у вигляді диска масою 100 кг обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи. Частота обертання $n$ = 10 об/хв. Людина масою 60 кг стоїть при цьому на краю платформи. З якою частотою обертатиметься платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центра? Людину вважати точковою масою.

**3-34.** На краю горизонтальної платформи, яка має форму диска радіусом 2 м, стоїть людина. Маса платформи 200 кг, маса людини 80 кг. Платформа може обертатись навколо вертикальної осі, яка проходить через її центр. Не враховуючи тертя, знайти, з якою кутовою швидкістю обертатиметься платформа, якщо людина йтиме вздовж краю зі швидкістю 2 м/с відносно платформи.

**3-35.** Маховик мав початкову частоту обертання 5 об/с і зупинився через 20 с під дією сталого гальмівного моменту 10 кН·м. Знайти момент інерції маховика.

### *1.5.3. Відповіді до задач*

**1-1.** 48 км/год. **1-2.** 54 км/год. **1-3.** 40 км/год. **1-4.** 64 км/год. **1-5.** 48 км/год. **1-6.** 36 км/год. **1-7.** 8,87 м/с. **1-8.** 48 км/год. **1-9.** 24 км/год. **1-10.** 16,7 км/год. **1-11.** 6,26 м/с. **1-12.** 11,33 м. **1-13.** 148,5 м. **1-14.** 25,4 м. **1-15.** 3,4 с; 15 м; 10,6 с; 123 м. **1-16.** а) 0,83 год; б) 0,85 год; в) 0,87 год. **1-17.** 1) 8,3 с; 2) 7,3 с; 3) 7,8 с. **1-18.** –3,06 м/с$^2$; 11,13 м/с. **1-19.** 5,08 с. **1-20.** 28 м/с. **1-21.** 9,6 м; 14,6 м/с. **1-22.** 12 с. **1-23.** 40 м/с; 32 м/с$^2$; 16 м/с. **1-24.** 5 м/с. **1-25.** 4 м/с. **1-26.** 2 м/с$^2$; 1 м/с$^2$; 2,2 м/с$^2$. **1-27.** 4 м/с; 2 м/с$^2$; 2 м/с$^2$; 2,8 м/с$^2$. **1-28.** 0,43 рад/с$^2$. **1-29.** 4,5 м/с$^2$; 0,06 м/с$^2$. **1-30.** 3,14 рад/с; $31{,}4\cdot10^{-2}$ м/с; $31{,}4\cdot10^{-2}$ м/с$^2$. **1-31.** 1,57 рад/с$^2$. **1-32.** 3876 км/год; 37,57 км/год$^2$. **1-33.** 5,23 рад/с$^2$; 375 об. **1-34.** 0,45 м/с$^2$. **1-35.** $7{,}27\cdot10^{-5}$ рад/с; $14{,}5\cdot10^{-5}$ рад/с; $1{,}74\cdot10^{-3}$ рад/с.

**2-1.** 2646 м; 95 с. **2-2.** 269 м/с. **2-3.** 742 м/с. **2-4.** 1,4 м/с. **2-5.** 3,76 м/с. **2-6.** 13,5 м/с. **2-7.** 2 м/с; 20,4 с. **2-8.** $5{,}6\cdot10^{-23}$ Н·с. **2-9.** 11,8 м/с. **2-10.** 50 с; 375 м. **2-11.** 2 Н. **2-12.** $3\cdot10^{-23}$ Н·с. **2-13.** 3,5 м/с$^2$; 12 Н; 24 Н.

**2-14.** 0,96. **2-15.** 3 м/с. **2-16.** 0,8 Н; 8 Н; 1,67 с. **2-17.** 2 м/с$^2$; 8 Н; 2 Н. **2-18.** 32 Дж; 39 Дж. **2-19.** 864 Н. **2-20.** 6 м/с. **2-21.** 980 Н; 2,98 кН. **2-22.** 2,01 Н; 4,02 Н. **2-23.** $2°54'$ **2-24.** 30°. **2-25.** 0,75 м/с. **2-26.** 20 Н. **2-27.** 24 см/с$^2$. **2-28.** 2,45 м/с$^2$; 7,35 Н. **2-29.** –6 м/с; 4 м/с. **2-30.** 1,5 кН/м; 8 кН/м. **2-31.** 29,4 кг. **2-32.** 5 кг. **2-33.** 6,45 км/с. **2-34.** 5 Дж; 15 Дж. **2-35.** 0,32 Вт; 56 Вт.

**3-1.** 3,92 м/с$^2$; 1,37 Н; 1,76 Н. **3-2.** 0,004 кг·м$^2$. **3-3.** 0,112 кг·м$^2$. **3-4.** $3{,}75\cdot10^{-3}$ кг·м$^2$. **3-5.** 1,04 рад/сек. **3-6.** 1,18 об/с. **3-7.** 14,2 кДж. **3-8.** 500 Дж. **3-9.** 12,5 Дж. **3-10.** 100 Н·м. **3-11.** 0,62 Н·м. **3-12.** 62,8 Н. **3-13.** 9,75 кг·м$^2$. **3-14.** 3,61 м/с; 1,12 с. **3-15.** 6,08 м/с$^2$. **3-16.** 6,03 рад/с. **3-17.** 6242 кг·м$^2$. **3-18.** 0,26 Н·м. **3-19.** 0,86 м. **3-20.** 1,61 Н·м; 180 об. **3-21.** $6\cdot10^{-3}$ кг·м$^2$. **3-22.** 3,02 м/с$^2$. **3-23.** 10,03 Н·м. **3-24.** 200 Н·м. **3-25.** 2,57 м/с$^2$. **3-26.** $12\cdot10^{-4}$ кг·м$^2$. **3-27.** 10,2 рад/с. **3-28.** 10 об/хв. **3-29.** 23,7 с. **3-30.** 0,61 м .**3-31.** 0,63 об/хв. **3-32.** 216°. **3-33**. 22 об/хв. **3-34.** 0,45 рад/с. **3-35.** 6369 кг·м$^2$.